第17卷第1期 数学研究与评论 Vol.17 No.1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

线性泛函微分方程解的渐近表示*

邓飞其 刘永清 冯昭枢
(华南理工大学自动控制工程系, 广州510641)

摘 要 本文利用一类特殊方程的一致稳定性与收敛性定理研究 R^n 中线性泛函微分方程解的渐近表示, 在较弱的条件下得到了与文[1]同样的渐近积分公式. 文中还讨论了一些特殊解的存在性、零解的吸引性等等.

关键词 泛函微分方程, 稳定性, 收敛性, 渐近表示
分类号 AMS(1991) 34K/CCL O175.1

关于泛函微分方程渐近积分的研究, 文献中已有较多结果[1-5]. 作者在文[1]中研究了一类线性泛函微分方程的渐近积分, 本文研究更具有一般性的线性泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = \Lambda(t)x(t) + \int_{r}[d_\theta \eta(t,\theta)]x(t+\theta), \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$, $\eta(t,\cdot)$ 在 $[-r,0]$ 上具有有界变差, $\Lambda(t)$ 为 $n\times n$ 连续矩阵函数, $r>0$, 常数. 本文减弱文[1]的条件、采用新的处理方法, 得到了与文[1]同样的渐近积分公式.

引入记号:

$$\begin{cases} I(t,\theta) = \exp[\int^{\theta}\Lambda(\tau)d\tau], \\ A(t) = \int[\Lambda(s) + \int_{r}[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)]ds. \end{cases} \tag{2}$$

引理1 若条件:

$$(H)\quad \begin{cases} A(t)\eta(s,\theta) = \eta(s,\theta)A(t), \\ \Lambda(s)\eta(s,\theta) = \eta(s,\theta)\Lambda(s), \quad \forall t,s,\theta \\ \Lambda(t)\Lambda(s) = \Lambda(s)\Lambda(t) \end{cases} \tag{3}$$

满足, 则(1)之任一解 $x(t)$ 可表成:

$$x(t) = \exp(\int[\Lambda(s) + \int_{r}[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)]ds)y(t), \tag{4}$$

其中 $y(t)$ 满足泛函微分方程

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = &- \int_{r}[d_\theta\eta(t,\theta)]I(t,\theta)[y(t) - y(t+\theta)] \\ &+ \int_{r}[d_\theta\eta(t,\theta)]I(t,\theta)\partial(t,\theta)y(t+\theta), \end{aligned} \tag{5}$$

* 1994年8月1日收到. 1996年6月16日收到修改稿.

$$\partial(t,\theta) = \exp\left(-\int_{+\theta}\int_{r}[d_{\beta}(s,\beta)]I(s,\beta)ds\right) - I.$$

引理2[1,6] **若有自然数** p **使** $\int_{r}\|d_{\theta}\eta(t,\theta)\| \in L^{p}[0,\infty)$, **则当** $t\to\infty$ **时, 方程**

$$\overset{\circ}{x}(t) = \int_{r}[d_{\theta}\eta(t,\theta)][x(t) - x(t+\theta)]$$

之每一解趋于常向量且其零解一致稳定

引理 3[7] **若** $\|\bullet\|$ **为诱导矩阵范数,** $\mu(\bullet)$ **为** $\|\bullet\|$ **诱导的矩阵测度, 则对方阵** A,

$$\|e^{A}\| \le e^{\mu(A)}.$$

引理 4[2] **若对某** $p > 0$, $q(\bullet)\in L^{p}[0,\infty)$, **则**

(i) $\int_{r}|q(s)|ds \in L^{p}[0,\infty)$;

(ii) $\int_{r}|q(s)|ds \to 0\ (t\to\infty)$.

定理 1 **若条件**(H) **满足,** $\mu(\Lambda(t))$ **或** $\|\Lambda(t)\|$ **有界, 有自然数** p **使** $\int_{r}\|d_{\theta}\eta(t,\theta)\|\in L^{p}[0,\infty)$, $\int_{r}\|d_{\theta}\eta(t,\theta)\|\|\partial(t,\theta)\|\in L^{1}[0,\infty)$, **则** $\forall\epsilon > 0$, **方程**(1) **之任一解** $x(t)$ **可表成**

$$x(t) = \exp\left(\int[\Lambda(s) + \int_{r}[d_{\theta}\eta(s,\theta)]I(s,\theta)ds)\right)(c(\epsilon) + z(t)), \tag{6}$$

其中 $c(\epsilon)$ **为一常向量, 对充分大的** t, $\|z(t)\| < \epsilon$

证明 **记方程**

$$\overset{\circ}{y}(t) = -\int_{r}[d_{\theta}\eta(t,\theta)]I(t,\theta)[y(t) - y(t+\theta)] \tag{7}$$

之基解矩阵为 $U(t,s)$. **由引理** 3, **当** $\mu(\Lambda(t))$ **或** $\|\Lambda(t)\|$ **有界时,** $I(t,\theta)$ **有界, 所以在定理条件下,** $\int_{r}\|[d_{\theta}\eta(t,\theta)]I(t,\theta)\|\in L^{p}[0,\infty)$. **于是由引理** 2, (7) **之零解一致稳定,** (7) **之解一致有界, 且当** $t\to\infty$ **时**(7) **之任一解趋于常向量 另外有** $\int_{r}\|[d_{\theta}\eta(t,\theta)]I(t,\theta)\partial(t,\theta)\|\in L^{1}[0,\infty)$, **所以由扰动定理,** (5) **之零解亦一致稳定, 从而其解一致有界 由引理** 4 **之**(ii),

$$\int^{r}\int_{r}\|[d_{\theta}\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\|ds$$

有界 由[8] **中** pp. 163 **之引理** 6.2, **有常数** K **使** $\|U(t,s)\|\le K\ (t\ge s)$.

设 $\sigma\in R$, $\varphi\in C([-r,0],R^{n})$, **记**(5) **过**$(\sigma,\varphi)$ **之解为** $y(t) = y(t,\sigma,\varphi)$. **由**(5) **之解的一致有界性, 有不依赖** σ **的正常数** k, **使得** $\|y(t)\|\le k\ (t\ge\sigma)$. **于是** $\forall\Theta\ge\sigma$, $|y_{\Theta}|\le k$, $|\bullet|$ **为** $\|\bullet\|$ **在** $C([-r,0],R^{n})$ **中诱导的范数 用** $Y(t) = Y(t,\Theta,y_{\Theta})$ **表示**(7) **过**(Θ,y_{Θ}) **之解 由**(7) **之解的一致有界性, 有不依赖于** Θ **与** σ **的常数** $M\ge 1$ **使** $\|y(t)\|\le M$.

由 $\int_{r}\|[d_{\theta}\eta(t,s)]I(t,\theta)\partial(t,\theta)\|$ **之** L^{1} **可积性, 存在常数** $\Theta\ge\delta$ **使**

$$\beta = \beta(\Theta) = KM\int_{\Theta}\int_{r}\|[d_{\theta}\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)\|ds$$

满足 $\beta e^{\beta} < \frac{\epsilon}{2}$.

记 $\omega(t) = y(t) - Y(t) = y(t,\sigma,\varphi) - Y(t,\Theta,y_{\Theta})\ (t\ge\Theta\ge\sigma)$. **由线性泛函微分方程的常**

数变量公式[8],

$$y(t) = Y(t) + \int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0} U(t,s)[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)y(s+\theta)ds$$

$$\omega(t) = \int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0} U(t,s)[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)Y(s+\theta)ds$$
$$+ \int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0} U(t,s)[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)\omega(s+\theta)ds.$$

由此易得

$$\|\omega(t)\| \le \beta + K\int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0}\|[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)\|\|\omega(s+\theta)\|ds.$$

作辅助函数

$$\upsilon(t) = \begin{cases} \beta, \Theta - r \le t \le \Theta, \\ \beta + K\int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0}\|[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)\|\|\omega(s+\theta)\|ds, t \ge \Theta, \end{cases}$$

则 $\upsilon(t)$ 是 $[\Theta - r, \infty)$ 上的单调不减非负连续函数, 且 $\|\omega(t)\| \le \upsilon(t)$, 于是对 $s \ge \Theta$, $\|\omega(s+\theta)\| = \upsilon(s+\theta) \le \upsilon(s)$, $\theta \in [-r, 0]$, 于是由 $\upsilon(t)$ 的定义式, 对 $t \ge \Theta$,

$$\upsilon(t) \le \beta + K\int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0}\|[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)\|\upsilon(s)ds,$$

于是由 Gronwall-Bellman 不等式

$$\upsilon(t) \le \beta\exp(K\int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0}\|[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)\|ds)$$
$$\le \beta\exp(KM\int_{\Theta}^{t}\int_{-r}^{0}\|[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)\partial(s,\theta)\|ds) \le \beta e^{\beta} < \frac{\epsilon}{2},$$
$$\|y(t) - Y(t)\| = \|\omega(t)\| \le \upsilon(t) < \frac{\epsilon}{2}.$$

由引理 2, 当 $t \to \infty$ 时, $Y(t)$ 趋于常向量. 设 $Y(t) \to c = c(\epsilon)$ (因 Θ 与 ϵ 有关, 所以 $Y(t)$ 以及 c 与 ϵ 有关), 那么存在 $T \ge \Theta$, 使当 $t \ge T$ 时, $\|Y(t) - c\| < \frac{\epsilon}{2}$. 于是当 $t \ge T$ 时,

$$\|y(t) - c\| \le \|y(t) - Y(t)\| + \|Y(t) - c\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

令 $z(t) = y(t) - c$, 则 $\|z(t)\| < \epsilon$, $y(t) = c + z(t)$. 将此代入(4) 即得(6). 定理 1 证毕.

由定理 1 进而得到本文第一个主要结果:

定理 2 若条件(H) 满足, $\mu(\Lambda(t))$ 或 $\|\Lambda(t)\|$ 有界, $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\| \in L^p[0,\infty)$, $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\|\partial(t,\theta)\| \in L^1[0,\infty)$ (p 为自然数), 则(1) 之任一解 $x(t)$ 可以表成:

$$x(t) = \exp(\int[\Lambda(s) + \int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(s,\theta)]I(s,\theta)]ds)(c + z(t)), \tag{8}$$

其中 $c \in R^n$ 为常向量, $z(t) \to 0 \in R^n$ $(t \to \infty)$.

证明 设 $x(t)$ 是(1) 之解, $y(t)$ 由(4) 确定. 由定理 1 之证明, $\forall n = 1, 2, \cdots$, 有常向量 $c_n \in R^n$, 与函数 $z_n(t) \in R^n$, 使 $y(t) = c_n + z_n(t)$. 其中 $z_n(t)$ 满足: 存在 T_n, 使当 $t \ge T_n$ 时, $\|z_n(t)\| < \frac{1}{n}$. 由于 $y(t)$ 有界, $\|y(t)\| \le k$, 所以 $\|c_n\| = \|y(t) - z_n(t)\| \le \|y(t)\| + \|z_n(t)\| \le k + \frac{1}{n} \le k + 1$, 所以 $\{c_n\}$ 有界, 有收敛子列. 不妨设 $\{c_n\}$ 本身收敛, $c_n \to c \in R^n$ $(n \to \infty)$, 于是 $\forall \epsilon >$

$0, \exists N > 0$, 使当 $n \geq N$ 时, $\|c_n - c\| < \frac{\epsilon}{2}$, 于是当 $n \geq \max[N, [\frac{2}{\epsilon}] + 1]$ 时, $\|z_n(t)\| + \|c_n - c\| < \epsilon$, 于是当 $t \geq T_m$ ($m = \max[N, [\frac{2}{\epsilon}] + 1]$) 时,

$$\|y(t) - c\| \leq \|y(t) - c_m\| + \|c_m - c\| = \|z_m(t)\| + \|c_m - c\| < \epsilon \tag{9}$$

(9) 说明: 当 $t \to \infty$ 时, $y(t) \to c$. 再令 $z(t) = y(t) - c\ (t \geq 0)$, 则 $z(t) \to 0\ (t \to \infty)$, 且 $y(t) = c + z(t)$. 由(4) 得定理结论.

定理 3 若条件(H) 满足, $\mu(\Lambda(t))$ 或 $\|\Lambda(t)\|$ 有界, $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \in L^p[0, \infty)$, $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \|\partial(t, \theta)\| \in L^1[0, \infty)$, 则对任何常向量 $c \in R^n$, $\epsilon > 0$, 存在函数 $z(t)$, $\|z(t)\| < \epsilon\ (t \geq T)$, 使(8) 成为(1) 之解.

证明 仍设(7) 之基解矩阵为 $U(t, s)$, 仍然利用 $\|U(t, s)\| \leq K\ (t \geq s)$. 由 $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \|\partial(t, \theta)\|$ 之 L^1 可积性, 有 T 使 $\gamma = \int\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \|\partial(t, \theta)\| ds$ 满足 $\gamma e^\gamma < \epsilon$

取 $\varphi \in C([-r, 0], R^n)$ 为 $\varphi \equiv c$, 记方程(5) 过 (T, φ) 之解为 $y(t) = y(t, T, \varphi)$. 由唯一性定理[8], (7) 之过 (T, φ) 之唯一解为 $Y \equiv c$. 类似上述证明, 用常数变易公式可证 $\|y(t) - c\| \leq \gamma e^\gamma < \epsilon\ (t \geq T)$. 令 $z(t) = y(t) - c$, 即得定理结果.

定理 4 若条件(H) 满足, $\mu(\Lambda(t))$ 或 $\|\Lambda(t)\|$ 有界, $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \in L^p[0, \infty)$, $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \|\partial(t, \theta)\| \in L^1[0, \infty)$, 则在(1) 的形如(8) 的渐近积分中 $(z(t) \to 0)$, 至少有一个常向量 $c \neq 0$.

证明 只须证(5) 之零解非吸引. 事实上, 由定理 3 之证明: 对任一单位向量 e, $\epsilon = \frac{1}{2}$, 有(5) 之解 $y(t)$ 使 $\|y(t) - e\| < \frac{1}{2}$, 所以可推出 $\|y(t)\| > \frac{1}{2} > 0$. 由此知 $y = 0$ 非吸引. 证毕.

推论 1 若条件(H) 满足, $\mu(\Lambda(t))$ 或 $\|\Lambda(t)\|$ 有界, 且 $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \in L^2[0, \infty)$, 则定理 1—4 之结论成立.

证明 只须证 $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \|\partial(t, \theta)\| \in L^1[0, \infty)$. 令 $d(t) = \exp\left(\int_{-r}\int_r \|d_\theta \eta(s, \theta) I(s, \theta)\| ds\right)$, 则易得 $\|\partial(t, \theta)\| \leq d(t) - 1$. 由 $\Lambda(\cdot)$ 之有界性, $\int_r \|d_\theta \eta(s, \theta) I(s, \theta)\|$ 仍属于 $L^2[0, \infty)$, 故由引理 4, $d(t) - 1 \in L^2[0, \infty)$, 从而由[2] 之引理 2.2 与不等式

$$\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \|\partial(t, \theta)\| \leq \left[\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\|\right][d(t) - 1]$$

知 $\int_r \|d_\theta \eta(t, \theta)\| \|\partial(t, \theta)\| \in L^1[0, \infty)$. 证毕.

推论 2 若定理 2 之条件成立, 且 $\|\exp(-A(t))\|_2$ 有界, 则(1) 之零解是非吸引的, 其中

$$A(t) = \int [\Lambda(s) + \int_r [d_\theta \eta(s, \theta)] I(s, \theta)] ds.$$

证明 由定理 3, 有向量函数 $z(t)$: $\|z(t)\| < \frac{1}{2}$ 使(8) 成为(1) 之解, 其中 $c = e$, $\|e\| = 1$. 于是可推出

$$\|x(t)\|^2 = [e + z(t)]^T e^{A^T(t)} e^{A(t)} [e + z(t)] \geq \lambda_{min}[e^{A^T(t)} e^{A(t)}] \|e + z(t)\|^2$$

$$\geq \|\exp(-A(t))\|_2^{-2}(\|e\| - \|z(t)\|)^2 \geq \frac{1}{4}k = \text{const} > 0,$$

由此知结论成立.

推论 3 若条件(H)满足, $\int_r^0 \|d_\theta \eta(\cdot, \theta)\| \in L^1[0, \infty)$, 则(1)之零解是非吸引的.

参 考 文 献

[1] 邓飞其, 线性泛函微分方程的一种渐近积分, 数学研究与评论, 2(1994), 293—298.

[2] J. R. Haddock, R. J. Sacker, *Stability and asymptotic integration for certain linear systems of functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 76(1980), 328-338.

[3] O. Arino, I. Györi, *Asymptotic integration of delay differential systems*, J. Math. Anal. Appl., 138(1989), 311-327.

[4] K. L. Cooke, *Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = au(t - r(u(t)))$*, J. Math. Anal. Appl., 19(1967), 160-173.

[5] O. Arino, I. Györi, *Asymptotic integration of functional differential systems which are asymptotically autonomous*, Proc. EQUADIFF'82, 37-59.

[6] Deng Feiqi, Zhao Yupeng, *Convergence of solutions of certain functional differential equations*, Proc. ICFDE'93, 47-51.

[7] W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Boston, D. C. Health, 1965.

[8] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

Asymptotic Representation of Solutions of Linear Functional Differential Equations

Deng Feiqi   Liu Yongqing   Feng Zhaoshu

(Dept. of Auto., South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Abstract

In this paper, asymptotic representation of solutions of linear functional differential equations in R^n is investigated with an uniform stability and convergence theorem for a special type of functional differential equations, and the same asymptotic integration formula same as that in [1] is obtained under weaker conditions. The existence of some type of special solutions of the equations and the attractivity of the zero solutions of the equations are also investigated in the paper.

Keywords functional differential equations, stability, convergence, asymptotic representation.