第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

L 旋转向量场中奇点的运动*

王 杰
(华北电力大学, 保定071003)

摘 要 本文引入 L 旋转向量场的定义, 给出奇点随参数移动的 L 旋转向量场中奇点移动的条件.

关键词 L 旋转向量场, 奇点指标
分类号 AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

对于旋转向量场理论的研究已有了许多工作[1-5], 本文给出 L 旋转向量场的定义, 运用 Lie 括号、Lie 群和旋转向量场理论来研究 L 旋转向量场中奇点随参数移动的情况, 扩大了旋转向量场的应用范围.

定义1 设由方程

$$\mathring{x}_1 = X_1(x,\mu),\quad \mathring{x}_2 = X_2(x,\mu) \tag{1}$$

确定的向量场 $X(\mu) = (X_1(x,\mu), X_2(x,\mu))$ 的奇点是孤立的, $x = (x_1, x_2) \in R^2, X_1, X_2 \in C^2(R^2 \times I, R), I = \{\mu \mid |\mu| < \delta, \delta > 0\}$. 若存在向量场 $Y: \mathring{x}_1 = Y_1(x), \mathring{x}_2 = Y_2(x), Y_1, Y_2 \in C^2(R^2, R)$, 使在 $X(0)$ 的一切常点处成立

$$L(0) \overset{\text{def}}{=} X(0) \wedge \{X'_\mu(0) + [X(0), Y]\} > 0 (< 0), \tag{2}$$

其中 $X'_\mu(0)$ 表示 $X(\mu)$ 对 μ 求导在 $\mu = 0$ 时的向量场, $[X(0), Y]$ 表示 $X(0)$ 和 Y 经过 Lie 括号运算后得到的向量场, 则称 $X(\mu)(\mu \in I)$ 构成 L 旋转向量场, 简记 $X(\mu) \in M^L(R^2)$, $M^L(R^2)$ 是 R^2 上 L 旋转向量场的集合.

注1 若 $X(\mu)$ 在 $D \times I$ 上有定义, $D \subset R^2$, 使得 $X(0)$ 在 D 上一切常点处成立(2)式, 则称 $X(\mu)(\mu \in I)$ 在 D 上构成 L 旋转向量场, 简记 $X(\mu) \in M^L(D)$, $M^L(D)$ 是 $D \subset R^2$ 上的 L 旋转向量场的集合.

下面的引理1的证明参阅[6-7].

引理1 设 $X, Y \in C^1(R^2, R)$, Ψ 是 Y 生成的单参数变换群, $s \in R$. 固定 s, 若 $\varphi_p(t)$ 是 X 过点 p 的积分曲线, $\varphi(0) = p$, 则 $\Psi \circ \varphi_p(t)$ 是向量场 $\Psi_* X$ 过点 $\Psi(p)$ 的积分曲线. 若 $X|_p = 0$, 则 $(\Psi_* X)|_{\Psi(p)} = 0$.

引理2 设 $X, Y \in C^1(R^2, R)$, Ψ 是 Y 生成的单参数变换群, $s \in R$. 固定 s, 则 X 的孤立奇点指标在 Ψ 变换下不变.

证明 由引理条件可知 Ψ 是微分同胚, 再由[8]中第五章定理4.2可证得该引理.

* 1994年4月25日收到. 1996年7月17日收到修改稿.

在下文中，当$X(\mu)\in M^L(R^2)$时，以Y表示满足(2)式的向量场，而Ψ^s表示Y生成的单参数变换群，$s\in R$.

引理3　设$X(\mu)\in M^L(R^2)$，则对$\forall\epsilon>0,\exists\delta=\delta(\epsilon)>0$，使得当$|\mu|<\delta$时，$\Psi^\mu_* X(\mu)$构成旋转向量场，简记$\Psi^\mu_* X(\mu)\in M^R$(旋转向量场集合).

证明　设$\Psi^\mu_* X(\mu)|_{p_{\mu_i}}=0,\mu\neq 0,i=1,2,\cdots,k$; 而$X(0)|_{p_j}=0,j=1,2,\cdots,m$. 对$\forall\epsilon>0,0<\epsilon\ll 1$，以$p_{\mu_i}(1\leq i\leq k)$及$p_j(1\leq j\leq m)$的每一点为圆心，$\epsilon$为半径作开圆盘$S_\epsilon(p_{\mu_i})$及$S_\epsilon(p_j)(1\leq i\leq k,1\leq j\leq m)$，使$\overline{S_\epsilon(p)}\cap\overline{S_\epsilon(q)}=\varnothing,p,q\in\{p_{\mu_i}\}\cup\{p_j\},1\leq i\leq k,1\leq j\leq m,p\neq q$. 由Lie括号的极限定义可得

$$\Psi^\mu_* X(\mu)=X(0)+\mu\{X'_\mu(0)+[X(0),Y]\}+o(\mu).\tag{3}$$

在$Q=R^2\setminus\{\bigcup_{i=1}^{k}S_\epsilon(p_{\mu_i})\}\cup\{\bigcup_{j=1}^{m}S_\epsilon(p_j)\}$的常点处，对给定的$\epsilon>0$，总可找到$\delta_1=\delta_1(\epsilon)>0$，使当$|\mu|<\delta_1$时，有

$$\Psi^\mu_* X(\mu)\wedge\frac{\partial}{\partial\mu}\{\Psi^\mu_* X(\mu)\}=L(0)+o(\mu)>0(<0).\tag{4}$$

又设$\Psi^\mu_* X(\mu)$与x_1轴的交角记为$\theta(\mu)$. 对给定$\epsilon>0$，总可找到$\delta_2=\delta_2(\epsilon)>0$，使得当$|\mu|<\delta_2$时，在$Q$的常点处($X(0)$与$x_1$轴交角为$\theta(0)$)成立不等式

$$0<|\theta(\mu)-\theta(0)|<\pi\tag{5}$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$|\mu|<\delta$时，$\Psi^\mu_* X(\mu)\in M^R$.

注2　按照旋转向量场的严格定义，奇点应保持不动，而引理3中$\Psi^\mu_* X(\mu)$的奇点是可以随参数μ变动而移动的. 在不引起混淆情况下，仍称$\Psi^\mu_* X(\mu)(|\mu|<\delta)$为旋转向量场.

引理3中的δ不一定是一个很小的正数，下面的例子说明这个问题.

例1　设$X(\mu)=(x_2,-x_1+\mu x_2)$，若取$Y=(-\frac{1}{2}x_2,0)$，则在$X(0)$的一切常点处有

$$L(0)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)>0,$$

即$X(\mu)\in M^L(R^2)$. 考虑μ值范围，因为

$$\Psi^\mu_* X(\mu)\wedge\frac{\partial}{\partial\mu}\{\Psi^\mu_* X(\mu)\}=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{2}\mu x_1x_2+\frac{1}{8}\mu^2x_2^2,\tag{6}$$

将(6)与(4)式比较，可得

$$o(\mu)=-\frac{1}{2}\mu x_1x_2+\frac{1}{8}\mu^2x_2^2,\tag{7}$$

但(6)式可进一步化为

$$\Psi^\mu_* X(\mu)\wedge\frac{\partial}{\partial\mu}\{\Psi^\mu_* X(\mu)\}=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{8}(\mu x_2-2x_1)^2.\tag{8}$$

上式在$\Psi^\mu_* X(\mu)(\mu\in R)$的常点处大于零，但满足(5)式的$\mu$取值范围是$|\mu|<4$，故取$\delta=4$，则当$|\mu|<\delta=4$时，$\Psi^\mu_* X(\mu)\in M^R$.

设$X(\mu)\in M^L(R^2)$，这里要求$X(\mu)$的奇点随参数μ的变化而严格移动，允许移动的奇点消失或分解有限个，且均不与原向量场的奇点重合. 设p是向量场X的奇点，则p点关于X的奇点指标记为$\upsilon(p,X)$.

定理 1 设 $X(\mu) \in M^L(R^2)$, $X(0)\big|_{p_0} = 0$, 又设 $R\big|_{p_0} = 0$, 若 $X(0)$ 的奇点 p_0 在 $X(\mu)$ ($\mu \neq 0$) 中消失或分解为 p_i ($1 \leq i \leq k$), 则 $\upsilon(p_0, X(0)) = 0$, 且 $\upsilon(p_i, X(\mu)) = 0$ ($\mu \neq 0$, $1 \leq i \leq k$).

证明 首先证 $\upsilon(p_0, X(0)) = 0$. 事实上, 由于 $X(\mu)\big|_{p_0} \neq 0$ ($\mu \neq 0$), 利用引理 1 及条件 $Y\big|_{p_0} = 0$, 可知 $\Psi^\mu_* X(\mu)\big|_{p_0} \neq 0$ ($\mu \neq 0$). 由引理 3, 对 $\delta > 0$, 当 $|\mu| < \delta$ 时, $\Psi^\mu_* X(\mu) \in M^R$. 取 $\eta > 0$ 充分小, 使得 $\overline{S_\eta(p_0)}$ 中不含 $\Psi^\mu_* X(\mu)$ ($\mu \neq 0$) 的奇点, 仅含 $X(0)$ 的孤立奇点 p_0, 易知关于 $\partial S_\eta(p_0)$ 有 $\upsilon(p_0, \Psi^\mu_* X(\mu)) = 0$ ($\mu \neq 0$), 由引理 3 的 (5) 式可知当 $|\mu| < \delta$ 时, $\upsilon(p_0, X(0)) = 0$.

同法可证 $\upsilon(\Psi^\mu(p_i), \Psi^\mu_* X(\mu)) = 0$ ($\mu \neq 0$, $1 \leq i \leq k$), 再由引理 2 可得 $\upsilon(p_i, X(\mu)) = 0$ ($\mu \neq 0$, $1 \leq i \leq k$). 证毕

推论 1 设 $X(\mu) \in M^L(R^2)$, $X(0)\big|_{p_0} = 0$, 若 $Y\big|_{p_0} \neq 0$, 且移动的奇点 $p_i \neq \Psi^\mu(p_0)$ ($\mu \neq 0$, $1 \leq i \leq k$), 则

$$\upsilon(p_0, X(0)) = 0 \text{ 且 } \upsilon(p_i, X(\mu)) = 0 \ (\mu \neq 0,\ 1 \leq i \leq k).$$

证明 因 $X(0)\big|_{p_0} = 0$, 设 $X(\mu)$ ($\mu \neq 0$) 的奇点消失或分解为不与 $X(0)$ 的奇点 p_0 重合的点 $p_1, \cdots, p_k$, 即 $X(\mu)\big|_{p_i} = 0$ ($1 \leq i \leq k$), 又因 $X(\mu)\big|_{p_0} \neq 0$ ($\mu \neq 0$) 及 $Y\big|_{p_0} \neq 0$, 由引理 1 有 $\Psi^\mu_* X(\mu)\big|_{\Psi^\mu(p_0)} \neq 0$ 及 $\Psi^\mu_* X(\mu)\big|_{\Psi^\mu(p_i)} = 0$, 然由条件 $\Psi^\mu(p_i) \neq p_0$ 可知 $\Psi^\mu_* X(\mu)\big|_{p_0} \neq 0$, 同定理 1 的证法一样可得 $\upsilon(p_0, X(0)) = 0$ 及 $\upsilon(p_i, X(\mu)) = 0$ ($\mu \neq 0$, $1 \leq i \leq k$). 证毕

推论 2 设 $X(\mu) \in M^L(R^2)$, $X(0)\big|_{p_0} = 0$, 若 $Y\big|_{p_0} \neq 0$, 但对某 i_0 ($1 \leq i_0 \leq k$), 有 $\Psi^\mu(p_{i_0}) = p_0$ ($\mu \neq 0$), 则

$$\upsilon(p_0, X(0)) = \upsilon(p_{i_0}, X(\mu)),\ \upsilon(p_i, X(\mu)) = 0 \ (\mu \neq 0,\ 1 \leq i \leq k \text{ 且 } i \neq i_0).$$

例 2 设 $X(\mu) = (x_2^2, -x_1 + \mu)$, 取 $Y = (3x_1 - ax_2, 2x_2)$, 当 $|\mu| < \delta$ 时, 取 $0 < a \ll 1$, 在 $D = \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 < a^{-1}\} \subset R^2$ 的区域上, 则 $X(0)$ 在 D 上一切常点处成立

$$L(0) = ax_1^2 + x_2^2 - ax_2^3 > 0,$$

即 $X(\mu) \in M^L(D)$, $X(\mu)$ 的奇点随 μ 的变化而严格移动, 注意到此时 $Y\big|_{p_0} = 0$, $p_0 = (0, 0)$ 是 $X(0)$ 奇点, 由定理 1 可知 $\upsilon(p_0, X(0)) = 0$ 及 $\upsilon(p_i, X(\mu)) = 0$ ($\mu \neq 0$), $p_i = (\mu, 0)$.

定理 2 设 $X(\mu) \in M^L(R^2)$. $X(0)\big|_{p_0} = 0$, p_0 是初等的. 若 $Y\big|_{p_0} = 0$, 则 p_0 不能随 μ 变动而移动. 若 $Y\big|_{p_0} \neq 0$, 则 p_0 随 μ 变动而移动, 且移动后的点为 $X(\mu)$ 的奇点 $\Psi^\mu(p_0)$ ($\mu \neq 0$).

证明 若 $Y\big|_{p_0} = 0$, 注意到 $\upsilon(p_0, X(0)) = \pm 1$, 由定理 1 立即知原题第一部分成立. 现考虑 $Y\big|_{p_0} \neq 0$ 的情形, 先证 p_0 确实随着 μ 变动而移动, 设其不然, 即 p_0 不随 μ 变动而移动, 则 $X(\mu)\big|_{p_0} = 0$ ($\mu \neq 0$), 由引理 1 知 $\Psi^\mu_* X(\mu)\big|_{\Psi^\mu(p_0)} = 0$, 因 p_0 是 $X(0)$ 的孤立奇点, 取 $\bar{\delta} > 0$ 及充分小的 $\eta > 0$, 使得当 $0 < |\mu| < \bar{\delta} < \delta$ 时, $\Psi^\mu(p_0) \notin \overline{S_\eta(p_0)}$, 则关于 $\partial S_\eta(p_0)$ 有 $\upsilon(p_0, \Psi^\mu_* X(\mu)) = 0$ (因 $\Psi^\mu_* X(\mu)\big|_{p_0} \neq 0$), 这里 $\mu \neq 0$. 然而 $\upsilon(p_0, X(0)) = \pm 1 \neq 0$, 由引理 3 可知这是一个矛盾, 故证得 p_0 确实随 μ 变动而移动, 再利用推论 1 和推论 2 可知 p_0 随 μ 变动而移动为 $X(\mu)$ 的奇点 $\Psi^\mu(p_0)$ ($\mu \neq 0$). 证毕

参 考 文 献

[1] 叶彦谦等, 极限环论, 上海科学技术出版社(第二版), 1984

[2] L. M. Perko, *Rotated vector fields and the global bahavior of cycles for a class of quadratic systems in the plane*, J. Diff. Eqns, 18(1975), 63- 86.
[3] G. F. D. Duff, *Limit-cycles and rotated vector fields*, Annals of Math., 57(1953), 15- 31.
[4] 马知恩, 旋转向量场中奇异闭轨线的运动, 西安交通大学学报, 4(1978), 49—65.
[5] 陈一元, 极限环和拟旋转向量场, 数学学报, 32: 6(1989), 786- 792.
[6] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975.
[7] 陈省身、陈维恒, 微分几何讲义, 北京大学出版社, 1983.
[8] 张芷芬、丁同仁, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1985.

The Motion of Singular Point on L-Rotated Vector Fields

Wang Jie
(North China Electric Power University, Baoding 071003)

Abstract

The paper gives the difinition of *L*-rotated vector fields in the plane and the conditions of the singular point moving on *L*-rotated vector, fields that critical point moves as parameter is changed.

Keywords L-rotated vector fields, index of singular point.