第17卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 17 No. 1
1997年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1997

关于迭代函数方程 $f^2(x)=af(x)+bx$ 的通解*

麦 结 华
(汕头大学数学研究所, 广东515063)

摘　要　设 λ 的二次三项式 $\lambda^2-a\lambda-b$ 的两个零点为 $\lambda_1=r$, $\lambda_2=s$ (a 及 b 为实数). 对 $0<r<s$, $r<0<s\neq -r$ 及 $r=s\neq 0$ 这三种情形, J. Matkowski 与 Weinian Zhang 在"Method of characteristics for functional equations in polynomial form"一文中给出了迭代函数方程

$$f^2(x)=af(x)+bx,\text{对任 }x\in R;f\in C^0(R,R)\tag{1}$$

的通解, 并证明了当 r 及 s 非实数时方程(1)无解. 对 $r=-s\neq 0$ 的情形, M. Kuczma 已给出了方程(1)的通解. 本文则对 $r<s<0$ 及 $rs=0$ 这两种情形给出了方程(1)的通解. 此外, 本文还给出了 $r<0<s\neq -r$ 时关于方程(1)的通解的一个简洁的证明.

关键词　连续函数, 迭代函数方程, 动力系统, 通解

分类号　AMS(1991) 39B12, 26A18, 58F08/CCL O174.1

迭代函数方程是近年来受到人们关注的一个研究课题[1-8]. 形如

$$F^2(\lambda x)=\lambda F(x),\text{对任 }x\in I\equiv[-1,1];F\in C^0(I,I);F(0)=1$$

(其中 $\lambda\in(-1,0)$ 是任一个给定的常数) 的方程通常称为 Feigenbaum 函数方程, 该方程与动力系统中的某些普适性质有关, 已有一些文献讨论了它的某些类型的解[1-3], 但它的通解目前尚难于全部求出. 而形如

$$f^{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_if^i(x),\text{对任 }x\in R;f\in C^0(R,R)$$

($a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是实数) 的函数方程, 当 n 较小时, 其通解的寻找或许不那么困难.

考虑 $n=2$ 的情形. 文献[8]较详细地讨论了如下的函数方程:

$$f^2(x)=af(x)+bx,\text{对任 }x\in R;f\in C^0(R,R),\tag{1}$$

其中 a 及 b 是任意给定的实数. 恒设 λ 的二次三项式 $\lambda^2-a\lambda-b$ 的两个零点为 $\lambda_1=r=r(a,b)$ 及 $\lambda_2=s=s(a,b)$. 显然我们有 $r+s=a$, $rs=-b$, 因而方程(1)亦可写成

$$f^2(x)=(r+s)f(x)-rsx,\text{对任 }x\in R;f\in C^0(R,R).\tag{1$'$}$$

对 $0<r<s$, $r<0<s\neq -r$ 及 $r=s\neq 0$ 这三种情形, 文献[8]求出了方程(1)的通解, 并证明了当 r 及 s 是虚部不为0的复数时方程(1)无解. 当 $r=-s\neq 0$ 时, 方程(1)的通解已先在文献[4]中得到. 下面将对剩下的 $r<s<0$ 及 $rs=0$ 这两种情形进行讨论并给出方程(1)的通解. 此外, 本文还将对 $r<0<s\neq -r$ 这一情形进行讨论, 给出此时方程(1)的通解的一个简单的证明.

* 1994年8月12日收到. 国家自然科学基金重点资助项目.

§1 方程(1)的解的几个性质

以 Z 表示全体整数的集合,以 $R_+ = (0, \infty)$ 表示全体正数的集合,$R_- = (-\infty, 0)$ 表示全体负数的集合. 限于连续函数,文献[8]的引理1可写成

引理1.1 设 $f \in C^0(R, R)$ 是方程(1)的解. 若方程(1)中的常数 $b \neq 0$,则 $f: R \to R$ 既单且满. 换言之,f 是从 R 到 R 的一个同胚映射. □

引理1.2 设 $f \in C^0(R, R)$ 是方程(1)的解. 若 $b \neq 0$,且 λ 的多项式 $\lambda^2 - a\lambda - b$ 的两个根 r 与 s 不相等,则对任 $x \in R$ 及任 $n \in Z$ 均有

$$f^n(x) = [s^n(f(x) - rx) + r^n(sx - f(x))]/(s - r). \tag{2}$$

证明 文献[8]的引理2已经指出,当 n 为非负整数时(2)式成立,当 n 为非正整数时下一式成立:

$$f^n(x) = [s^n(f^{-1}(x) - x/r) + r^n(x/s - f^{-1}(x))]/(1/s - 1/r). \tag{3}$$

在(3)式中以 $f(x)$ 代替 x,以 $n-1$ 代替 n,可推知 n 为非正整数时(2)式亦成立. □

下一引理实际上是[8]的引理3的 a) 和 d):

引理1.3 设 $f \in C_0(R, R)$ 是方程(1)的解. 若多项式 $\lambda^2 - a\lambda - b$ 的根 r 及 s 均是正数,或均是负数,且 $r < s$,则对任 $x \in R$ 及任 $y \in R - \{x\}$ 均有

$$r \leq [f(y) - f(x)]/(y - x) \leq s. \tag{4}$$

引理1.4 设 f 是方程(1)的解. 若 $\lambda^2 - a\lambda - b$ 的根 γ 及 s 均不等于1,则 f 的不动点(假如存在的话)只能是0(见文[8]的引理4).

引理1.5 若 $b \neq 0$,则当且仅当 g 是方程

$$g^2(y) = -ag(y)/b + y/b, \text{对任 } y \in R; g \in C^0(R, R) \tag{5}$$

的一个解时,$f = g^{-1}$ 是方程(1)的一个解.

证明 设 g 是方程(5)的一个解,则据引理1.1,g 是个从 R 到 R 的同胚,因而 $f \equiv g^{-1}$ 也是个从 R 到 R 的同胚. 对任 $x \in R$,把 $y = f^2(x)$ 代入(5)式,可知(1)式成立,因而 f 是方程(1)的解.

反之,设 f 是方程(1)的一个解. 令 $g = f^{-1}$. 把 $x = g^2(y)$ 代入(1)式(任 $y \in R$),可知(5)式成立. 因而 g 是方程(5)的一个解. □

显然,还有

引理1.6 设 r 及 s 是多项式 $\lambda^2 - a\lambda - b$ 的两个根,$b \neq 0$,则 $1/r$ 与 $1/s$ 是 μ 的多项式 $\mu^2 + a\mu/b - 1/b$ 的两个根. □

为了后面叙述的方便,引进如下的定义:

定义1.1 设 ξ 是定义在 R 的子集 X 上的实值连续函数,又设 $\alpha \leq \beta$ 是实数. 若对任 $x \in X$ 及任 $y \in X - \{x\}$ 均有 $\alpha \leq [\xi(y) - \xi(x)]/(y - x) \leq \beta$,则称 ξ 是扩张率含于 $[\alpha, \beta]$ 的函数.

§2 $r < s < 0$ 的情形

下面总假定多项式 $\lambda^2 - a\lambda - b$ 的根 r 及 s 均为实数. 对任 $\{p, q\} \subset R$,当 $q \geq p$ 时令 $[p; q] = [p, q]$,当 $q \leq p$ 时令 $[p; q] = [q, p]$.

(A) $r < s < -1$ 的情形

当 $r<s<-1$ 时, 文献[8]的定理3给出了方程(1)的关于原点 O 中心对称的, 即 $f(-x)=-f(x)$ 对任 $x\in R$ 成立的解, 但未给出方程(1)的通解. 为此我们提出如下的定理, 此定理实际上给出了 $r<s<-1$ 时方程(1)的通解.

定理2.1 设 $r<s<-1$.

1) 若 $f\in C^0(R,R)$ 是方程(1)的一个解, $t=f(1)$, $c=at+b$, $J=[1;c]$, $\varphi=f|_J$, 则

$$t\in[r,s],\quad c\in[s^2,r^2],\tag{6}$$

$$\varphi(1)=t,\quad \varphi(c)=[s^3(t-r)+r^3(s-t)]/(s-r),\tag{7}$$

$$r\le[\varphi(u)-\varphi(v)]/(u-v)\le s,\ \text{对任}\ u\in J\ \text{及}\ v\in J-\{u\}.\tag{8}$$

2) 反之, 对任 $t\in[r,s]$ 及 $J\equiv[1;c]$ $(c\equiv at+b)$ 上的任一个满足(7)及(8)式的连续函数 φ, 方程(1)有唯一的解 $f\in C^0(R,R)$ 满足 $f|_J=\varphi$.

证明 1) 据引理1.3知 f 是严格递减的. 据引理1.4知0是 f 的唯一的不动点. 在(4)式中取 $y=1$, $x=0$, 可知 $t\in[r,s]$. 由此推出

$$c\in\{ay+b: y\in[r,s]\}=[s^2,r^2].$$

注意到 $c=f(t)=f^2(1)$, $\varphi(c)=f^3(1)$, 由(2)式可得到(7)式. 将(4)式限制在区间 J 上, 可得到(8)式.

2) 对任 $n\in Z$, 令

$$t_n=[s^n(t-r)+r^n(s-t)]/(s-r),\tag{9}$$

显然 $t_{n+2}=at_{n+1}+bt_n$ (任 $n\in Z$), 且 $t_0=1$, $t_1=t$, $t_2=c$, $t_3=\varphi(c)$. 因 $r<s<-1$, 故

$$\cdots, t_5, t_3, t_1, t_{-1}, t_{-3}, \cdots, 0, \cdots, t_{-4}, t_{-2}, t_0, t_2, t_4, \cdots$$

是严格递增的数列, 且当 $n\to-\infty$ 时 $t_n\to0$, 当偶数 $n\to\infty$ 时 $t_n\to\infty$, 当奇数 $n\to\infty$ 时 $t_n\to-\infty$.

对任 $n\in Z$, 记 $J_n=[t_n,t_{n+2}]$, 则 $J_0=J$, 且 $\varphi(J_0)=J_1$. 令 $\varphi_0=\varphi: J_0\to J_1$. 对整数 $i\ge1$, 假如已经定义了扩张率含于 $[r,s]$ 的逆转定向的同胚(即严格递减的单且满的连续映射) $\varphi_{i-1}: J_{i-1}\to J_i$ 及 $\varphi_{-i+1}: J_{-i+1}\to J_{-i+2}$, 那么, 继续定义 $\varphi_i: J_i\to J_{i+1}$ 及 $\varphi_{-i}: J_{-i}\to J_{-i+1}$ 为

$$\varphi_i(x)=ax+b\varphi_{i-1}^{-1}(x),\ \text{对任}\ x\in J_i,\tag{10}$$

$$\varphi_{-i}=\psi_{-i}^{-1},\tag{11}$$

其中 $\psi_{-i}: J_{-i+1}\to J_{-i}$ 的定义为

$$\psi_{-i}(y)=[\varphi_{-i+1}(y)-ay]/b,\ \text{对任}\ y\in J_{-i+1}.\tag{12}$$

由 $\varphi_{i-1}(t_j)=t_{j+1}$ $(j=i\pm1)$ 及 $\varphi_{-i+1}(t_k)=t_{k+1}$ $(k\in\{-i+1,-i+3\})$ 容易从(10)及(12)式算出 $\varphi_i(t_{j+1})=t_{j+2}$, $\varphi_{-i}(t_k)=t_{k-1}$. 因 φ_{i-1} 及 φ_{-i+1} 的扩张率含于 $[r,s]$, φ_{i-1}^{-1} 的扩张率含于 $[1/s,1/r]$, 据(10)及(12)式可得

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_i(x)-\varphi_i(v)}{x-v}&=a+b\cdot\frac{\varphi_{i-1}^{-1}(x)-\varphi_{i-1}^{-1}(v)}{x-v}\in\left[a+\frac{b}{r},a+\frac{b}{s}\right]\\&=[r,s],\quad \text{对任}\{x,v\}\subset J_i, x\ne v,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{-i}(y)-\psi_{-i}(w)}{y-w}&=\frac{\varphi_{-i+1}(y)-\varphi_{-i+1}(w)}{b(y-w)}-\frac{a}{b}\in\left[\frac{s-a}{b},\frac{r-a}{b}\right]\\&=\left[\frac{1}{s},\frac{1}{r}\right],\quad \text{对任}\{y,w\}\subset J_{-i+1}, y\ne w.\end{aligned}\tag{14}$$

因此, ψ_{-i} 是扩张率含于 $[1/s,1/r]$ 的逆向同胚, 而 φ_i 及 φ_{-i} 是扩张率含于 $[r,s]$ 的逆向同胚.

如此下去, 对任 $n\in Z$ 均唯一地定义出一个扩张率含于$[r,s]$的逆向同胚 $\varphi_n: J_n\to J_{n+1}$, 它们满足

$$\begin{cases}\varphi_{n+1}\varphi_n(x)=a\varphi_n(x)+bx, \text{对任 } x\in J_n,\\ \varphi_n(t_{n+2})=\varphi_{n+2}(t_{n+2}), \text{对任 } n\in Z.\end{cases}\tag{15}$$

令 $f: R\to R$ 为 $f(0)=0, f|J_n=\varphi_n$(任 $n\in Z$), 则 f 连续, $f|J=\varphi$, 且由(15)式知 f 是(1)的解.

还须证明如此的 f 是唯一的. 事实上, 假如 $f'\in C^0(R,R)$也是方程(1)的解, 且 $f'|J=\varphi$, 令 $\varphi'_n=f'|J_n$(任 $n\in Z$), 则 $\varphi'_0=\varphi_0$, 并且, 对任一正整数 i, 由 $\varphi'_{i-1}=\varphi_{i-1}$及方程(1)可推出 $\varphi'_i=\varphi_i$, 由 $\varphi'_{-i+1}=\varphi_{-i+1}$及方程(1)可推出 $\varphi'_{-i}=\varphi_{-i}$. 因此, $f'=f$. □

注2.1 在定理2.1之2)中, 令 $d=d(t)=[s^3(t-r)+r^3(s-t)]/(s-r)$. 容易看出, 当 $t=r$(或 s)时, $c=(r+s)t-rs=r^2$(或 s^2), $d=r^3$(或 s^3), 且

$$\frac{d-t}{c-1}=\frac{r^3-r}{r^2-1}\left(\text{或}\frac{s^3-s}{s^2-1}\right)=r(\text{或 } s).$$

此时, 由 $\varphi(x)=rx$(或 sx)(对任 $x\in J$)定义的 φ是 J 上唯一满足(7)及(8)式的连续函数, 而由 $f(x)=rx$(或 sx)(对任 $x\in R$)定义的函数 f 则是(1)的满足 $f(1)=r$(或 s)的唯一的解.

当 $t\in(r,s)$时, 记 $\epsilon=t-r, \delta=s-t, p=(s^2-1)\epsilon, q=(r^2-1)\delta$, 则 ϵ,δ,p,q 均是正数. 此时, $s-r=\epsilon+\delta, t=(s\epsilon+r\delta)/(\epsilon+\delta), c=(s^2\epsilon+r^2\delta)/(\epsilon+\delta)\in(s^2,r^2), d=(s^3\epsilon+r^3\delta)/(\epsilon+\delta)\in(r^3,s^3)$, 且

$$\frac{d-t}{c-1}=\frac{(d-t)(s-r)}{(c-1)(s-r)}=\frac{s^3\epsilon+r^3\delta-s\epsilon-r\delta}{s^2\epsilon+r^2\delta-\epsilon-\delta}=\frac{sp+rq}{p+q}\in(r,s).$$

由此可知, 当 $t\in(r,s)$时, 存在着无穷(且不可数)多个满足(7)及(8)式的区间 J 上的连续函数 φ使得 $\varphi(-t)\neq -c$. 因此, 当 $r<t<s<-1$时, 方程(1)有无穷多个关于原点 O 不中心对称且满足 $f(1)=t$ 的解 f.

(B) $-1<r<s<0$的情形

据引理1.5及引理1.6容易证明, 当 $-1<r<s<0$时, 定理2.1中的1)及2)仍然成立, 在此不必再重复叙述.

(C) $r<-1<s<0$的情形

引理2.1 设 f 是方程(1)的一个解. 若 $r<-1<s<0$, 则对任 $x\in R-\{0\}$均有 $f^2(x)\neq x$.

证明 假如对某 $v\in R-\{0\}$有 $f^2(v)=v$, 则据(2)式可得

$$v=f^2(v)=\cdots=\lim_{n\to\infty}f^{2n}(v)=\lim_{n\to\infty}r^{2n}(sv-f(v))/(s-r).\tag{16}$$

但 $n\to\infty$时 $r^{2n}\to\infty$, 故无论 $sv-f(v)$是否等于0, (16)式都不能成立. 因此, 对任 $x\in R-\{0\}$均有 $f^2(x)\neq x$. □

定理2.2 若 $r<-1<s<0$, 则 $f\in C^0(R,R)$是方程(1)的一个解的充分必要条件是 $f(x)=rx$(对任 $x\in R$), 或 $f(x)=sx$(对任 $x\in R$).

由此可知, 当 $r<-1<s<0$时方程(1)恰有两个解.

证明 定理的充分性部分是显然的. 下面证定理的必要性部分. 设 f 是方程(1)的一个解, 据引理1.3及1.4知 f 是严格递减的, $f(0)=0$, 且

$$f(R_+)=R_-,\quad f(R_-)=R_+,\tag{17}$$

据引理2.1, $f^2(1)=R_+-\{1\}$.

若 $f^2(1)<1$，则由引理2.1及 f^2 的连续性以及(17)式可知对任 $x\in R-\{0\}$ 均有 $|f^2(x)|<|x|$，并且，由此可进一步推出 $\lim_{n\to\infty}f^n(x)=0$. 于是，据(2)式得 $\lim_{n\to\infty}r^n(sx-f(x))/(s-r)=0$，推出 $f(x)=sx$ (对任 $x\in R$).

若 $f^2(1)>1$，则据类似的理由得 $|f^2(x)|>|x|$，且 $\lim_{n\to-\infty}f^n(x)=0$ (对任 $x\in R-\{0\}$). 据(2)式得 $\lim_{n\to-\infty}s^n(f(x)-rx)/(s-r)=0$，从而 $f(x)=rx$ (任 $x\in R$). □

(D) $r=-1$ 且 $s\in R_- -\{-1\}$ 的情形

引理2.2 设 f 是方程(1)的一个解，$J=\{x\in R: f^2(x)=x\}$，$K=\{w\in R: f(w)=-w\}$. 若 $r=-1$ 且 $s<0$，$s\neq-1$，则存在 $\beta\in[0,\infty]$ 使得

$$J=[-\beta,\beta]\cap R\subset K. \tag{18}$$

证明 由引理1.3及1.4知 f 严格递减，$f(0)=0$，且

$$[f^2(x)-f^2(y)]/(x-y)\in[1;s^2],\ \text{对任}\{x,y\}\subset R,\ x\neq y. \tag{19}$$

假如 $J\not\subset K$，则存在 $u\in J-\{0\}$ 使得 $f(u)\neq-u$. 但此时将有

$$\left\{\frac{f(u)-f(0)}{u-0},\frac{f^2(u)-f^2(0)}{f(u)-f(0)}\right\}=\left\{\frac{f(u)}{u},\frac{u}{f(u)}\right\}\not\subset[-1;s],$$

与引理1.3矛盾. 故必有 $J\subset K$.

假如 J 不连通，则存在 $\{u,v\}\subset J$ 及 $w\subset[u;v]$ 使得 $w\notin J$. 此时，无论 $f^2(w)>w$ 或是 $f^2(w)<w$ 均有

$$\left\{\frac{f^2(w)-f^2(u)}{w-u},\frac{f^2(v)-f^2(w)}{v-w}\right\}=\left\{\frac{f^2(w)-u}{w-u},\frac{v-f^2(w)}{v-w}\right\}\not\subset[1;s^2].$$

但这与(19)式矛盾，故 J 必是 R 的连通子集.

显然 J 是闭集. 于是，存在 $\beta'\in[-\infty,0]$ 及 $\beta\in[0,\infty]$ 使得 $J=[\beta',\beta]\cap R$. 因 J 是 f 不变的，$f|J$ 是从 J 到 J 的逆向同胚，故当 $\beta=\infty$ 时 $\beta'=-\infty$，此时(18)式成立；当 $\beta<\infty$ 时必有 $\beta'>-\infty$，且 $f(\beta)=\beta'$. 此时，由 $J\subset K$ 知 $\beta'=-\beta$，(18)式亦成立. □

定理2.3 若 $r=-1$ 且 $s<0$，$s\neq-1$，则 $f\in C^0(R,R)$ 是方程(1)的解的充分必要条件是存在 $\beta\in[0,\infty]$ 使得

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{若 } x\in[-\beta,\beta]\cap R;\\ -\beta+s(x-\beta), & \text{若 } \beta<\infty \text{ 且 } x\geq\beta;\\ \beta+s(x+\beta), & \text{若 } \beta<\infty \text{ 且 } x\leq-\beta\end{cases} \tag{20}$$

证明 当 f 如(20)式所定义时，容易验证 f 是方程(1)的一个解.

反之，设 f 是方程(1)的一个解. 令 β 及 J 如引理2.2所述，则由引理2.2可得

$$f(x)=-x,\ \text{对任 } x\in J. \tag{20$'$}$$

据引理2.2及(19)式还可推出，当 $\beta<\infty$ 时，

$$[f^2(x)-\gamma]/(x-\gamma)\in[1;s^2]-\{1\},\ \text{对任 } x\in R-J,\ \gamma\in\{\beta,-\beta\}.$$

于是，当 $\beta<\infty$ 且 $s\in(-1,0)$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}f^{2n}(x)=\begin{cases}\beta, & \text{对任 } x\in[\beta,\infty);\\ -\beta, & \text{对任 } x\in(-\infty,-\beta],\end{cases} \tag{21}$$

当 $\beta<\infty$ 且 $s<-1$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} f^{-2n}(x) = \begin{cases} \beta, & \text{对任 } x \in [\beta, \infty); \\ -\beta, & \text{对任 } x \in (-\infty, -\beta]. \end{cases} \tag{22}$$

由(21), (22)及(2)式可知, 无论 $s\in(-1, 0)$或是 $s< -1$, 当 $\beta< \infty$时总有

$$[sx - f(x)]/(s+1) = \begin{cases} \beta, & \text{对任 } x \in [\beta, \infty); \\ -\beta, & \text{对任 } x \in (-\infty, -\beta]. \end{cases} \tag{20}''$$

由(20)′及(20)″式即可得到(20)式. □

§3 $b=0$的情形

文献[8]未讨论 $b=-rs=0$的情形. 为了更完整一点, 不妨在此对 $b=0$的情形略作讨论. 此时, 方程(1)简化为

$$f^2(x) = af(x), \text{对任 } x \in R; f \in C^0(R, R). \tag{1}''$$

定理3.1 设 $f \in C^0(R, R)$, 则 f 是方程(1)″的解的充分必要条件是存在 $\beta\in[-\infty, \infty)$及 $\gamma\in[\beta, \infty]-\{-\infty\}$使得下列各个条件成立:

(i) $\overline{f(R)} = [\beta, \gamma]\cap R$;

(ii) 对任 $x\in[\beta, \gamma]\cap R$ 均有 $f(x) = ax$;

(iii) 若 $a>1$, 则 $\beta\in\{-\infty\}\cup[0, \infty)$, $\gamma\in(-\infty, 0]\cup\{\infty\}$;

(iv) 若$0<a<1$, 则$-\infty\le\beta\le0\le\gamma\le\infty$;

(v) 若 $a=0$, 则$-\infty\le\beta\le0\le\gamma\le\infty$, 且当 $\beta=-\infty$时 $\gamma<\infty$;

(vi) 若$-1\le a<0$, 则当 $\beta=-\infty$时 $\gamma=\infty$, 当 $\beta>-\infty$时$-\infty<\beta\le a\gamma\le0\le a\beta\le\gamma<\infty$;

(vii) 若 $a<-1$, 则$[\beta, \gamma]=[-\infty, \infty]$, 或者$[\beta, \gamma]=\{0\}$.

证明 1) 设 $f\in C^0(R, R)$. 若存在 $\beta\in[-\infty, \infty)$及 $\gamma\in[\beta, \infty]-\{-\infty\}$使得条件(i)及(ii)成立, 则对任 $y\in R$, 由条件(i)知 $f(y)\in[\beta, \gamma]\cap R$, 由条件(ii)知 $f^2(y) = af(y)$, 因而 f 是方程(1)″的解.

2) 反之, 设 f 是方程(1)″的解. 令 $J_0= f(R)$, 又令 $J=\overline{J_0}$为 J_0在 R 中闭包, 则 J 是 R 的非空连通闭子集. 于是, 存在唯一的 $\beta\in[-\infty, \infty)$及 $\gamma\in[\beta, \infty]-\{-\infty\}$使得

$$J = \overline{f(R)} = [\beta, \gamma]\cap R, \tag{23}$$

因而条件(i)成立.

对任 $x\in J_0$, 取 $y\in f^{-1}(x)$. 由 $f^2(y) = af(y)$可知 $f(x) = ax$. 于是, 由 f 的连续性推出条件(ii)成立.

当 $a>1$时, 假如 $\gamma\in R_+\equiv(0, \infty)$, 则由条件(ii)及(i)推出 $a\gamma\in J$. 但这与(23)式矛盾. 因此 $\gamma\notin R_+$. 同理可证 $\beta\notin R_-\equiv(-\infty, 0)$. 条件(iii)成立.

当$0\le a<1$时, 任取 $v\in J$. 由条件(i)及(ii)知$\{a^n c: n=0, 1, 2, \cdots\}\subset J$. 因 J 是闭集, 故$0\in J$, 从而推出条件(iv)成立.

当 $a=0$时, 假如$[\beta, \gamma]=[-\infty, \infty]$, 则 $J=R$. 但这时由条件(ii)及(i)又可推出 $J=\{0\}$, 从而导致矛盾. 故此当 $\beta=-\infty$时 $\gamma<\infty$. 条件(v)成立.

当$-1\le a<0$时, 若 $\beta=-\infty$, 则由条件(ii)可推出 $\gamma=\infty$. 类似地, 由 $\gamma=\infty$亦可推出 $\beta=-\infty$. 于是, 当 $\beta>-\infty$时 $\gamma<\infty$, 此时, 由条件(ii)及(i)可推出$[a\gamma, a\beta]= f([\beta, \gamma])\subset[\beta, \gamma]$, 故条件(vi)成立.

当 $a<-1$时，若 $J\neq\{0\}$，取 $c\in J-\{0\}$，则$\{\cdots, a^5c, a^3c, ac, c, a^2c, a^4c, \cdots\}$是 J 的既无上界又无下界的子集. 由此推出 $J=R$，条件(vii)成立. □

注3.1　对任 $\beta\in[-\infty,\infty)$及 $\gamma\in[\beta,\infty]-\{-\infty\}$，只要 β 及 γ 满足定理3.1中的条件(iii)-(vii)(实际上只需按照 a 的值的大小满足其中的一个条件，当 $a=1$时更不必再满足什么条件)，便可以按照定理中的条件(ii)定义出函数 $f_0\equiv f\,|[\beta,\gamma]\cap R$，并按照条件(i)将 f_0扩充为 $f\in C^0(R,R)$(当 $R-[\beta,\gamma]\neq\varnothing$即$[\beta,\gamma]\neq[-\infty,\infty]$时，将 f_0扩充为符合条件(i)的 f 的方式有无穷多种). 如此得到的 f 必定是方程(1)的解. 根据定理3.1，这个由 β 及 γ决定 f_0并扩充成 f 的过程实际上已给出了方程(1)的通解的构造.

§4　$r<0<s$ 且 $r\neq-s$ 的情形

仍设 r 及 s 是 λ的二次多项式 $\lambda^2-a\lambda-b$ 的两个根(或零点). 文献[8]的定理5讨论了 $r<0<s$ 且 $r\neq-1, s\neq1, r\neq-s$ 的情形，[8]的定理8讨论了 $r<0, r\neq-1$且 $s=1$的情形，[8]的定理9讨论了 $r=-1, s>0$且 $s\neq1$的情形. [8]的定理5的证明也显得较长了些. 其实，可以将这三种情形合并起来考虑，将这三个定理合并为一个定理，并且给出一个统一的简洁的证明.

引理4.1　设 $g_n\in C^0(R,R)$，且$(-1)^n g_n(x)$对 x 单调递增$(n=0,1,2,\cdots)$. 若极限 $g(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)$对任 $x\in R$ 均存在，则极限函数 g 是个常值函数.

证明　因 $g(x)=\lim_{n\to\infty}g_{2n}(x)$，而 $g_{2n}(x)$ 对 x 递增，故 $g(x)$ 对 x 递增. 又因 $g(x)=\lim_{n\to\infty}g_{2n+1}(x)$，而 $g_{2n+1}(x)$ 对 x 递减，故 $g(x)$ 对 x 递减. 于是，g 只能是个常值函数. □

定理4.1　若 $r<0<s$，且 $r\neq-s$，则 $f\in C^0(R,R)$是方程(1)的解的充分必要条件是 $f(x)=rx$(对任 $x\in R$)，或者 $f(x)=sx$(对任 $x\in R$)，或者，当 $s=1$时还可以是 $f(x)=rx+c$(对任 $x\in R$，c 可以是任一个给定的实数).

证明　定理的充分性部分是显然的. 下面证明定理的必要性部分. 设 f 是方程(1)的一个解，据引理1.1知 f 严格单调. 若 f 严格递增，由(2)式可推出

$$sx-f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}(s-r)f^n(x)/r^n, & \text{若 } |r|>s;\\ \lim\limits_{n\to-\infty}(s-r)f^n(x)/r^n, & \text{若 } |r|<s.\end{cases}\tag{24}$$

因$(-1)^n(s-r)f^n(x)/r^n$ 是 x 的递增函数(任 $n\in Z$)，由(24)式及引理4.1知极限函数 $sx-f(x)$ 恒取常值，即存在某 $c\in R$ 使得 $f(x)=sx+c$ 对任 $x\in R$ 成立. 把 $f(x)$ 的这一个表达式代入方程$(1)^r$，得 $s^2x+sc+c=(r+s)(sx+c)-rsx$，推出 $c=0$. 因此，当 f 递增时 $f(x)=sx$(对任 $x\in R$).

若 f 严格递减，由(2)式可推出

$$f(x)-rx=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}(s-r)f^n(x)/s^n, & \text{若 } s>|r|;\\ \lim\limits_{n\to-\infty}(s-r)f^n(x)/s^n, & \text{若 } s<|r|.\end{cases}\tag{25}$$

因$(-1)^n(s-r)f^n(x)/s^n$ 是 x 的递增函数(任 $n\in Z$)，由(25)式及引理4.1可同样推出 $f(x)=rx+c$(对任 $x\in R$). 将此表达式代入方程(1)中，得

$$r^2x+rc+c=(r+s)(rx+c)-rsx,\tag{26}$$

(26)式可化简为 $(s-1)c=0$. 因此, 当 $s\neq 1$ 时 $c=0$, 当 $s=1$ 时 c 可为任意给定的实数 □

参 考 文 献

[1] M. J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformation*, J. Stat. Phys., 19(1978), 25-52.

[2] 杨路、张景中, 第二类 Feigenbaum 函数方程, 中国科学(A), 12(1985), 1061—1069.

[3] Liao Gongfu, *On the Feigenbaum's functional equation* $f^p(\lambda x)=\lambda f(x)$, Chin. Ann. of Math., 15B: 1(1994), 81-88.

[4] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Monografic Matematyczne, Tom 46, Warszwa, 1968.

[5] A. Mukherjea and J. S. Ratti, *On a functional equation involving iterates of a bijection on the unit interval*, Nonlinear Analysis, 7(1983), 899-908.

[6] Zhang Weinian, *Discussion on the solutions of the iterated equation* $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$, Chin. Bul. of Sci., 32(1987), 21: 1444-1451.

[7] Zhang Weinian, *Discussion on the differentiable solutions of the iterated equation* $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$, Nonlinear Analysis, 15(1990), 4: 387-398.

[8] J. Matkowski and Zhang Weinian, *Method of characteristics for functional equations in polynomial form*, Acta Math. Sinica, New Series

On General Solutions of the Iterated Functional Equation $f^2(x)=af(x)+bx$

Mai Jiehua

(Inst. of Math., Shantou University, Guangdong 515063)

Abstract

Let a and b be real numbers, and let the two zero points of the quadratic polynomial $\lambda^2-a\lambda-b$ of λ be $\lambda_1=r$ and $\lambda_2=s$. For the three cases $0<r<s$, $r<0<s\neq -r$, and $r=s\neq 0$, J. Matkowski and Weinian Zhang obtained general solutions of the iterated functional equation

$$f^2(x)=af(x)+bx,\ \text{for all } x\in R;\ f\in C^0(R,R) \tag{1}$$

in their paper "Method of characteristics for functional equation in polynomial form", and proved that there are no solutions of equation (1) when r and s are not real numbers. For the case $r=-s\neq 0$, M. Kuczma has given general solutions of (1). And in this paper, for the remaining two cases $r<s<0$ and $rs=0$, we give general solutions of (1). Moreover, we give a simple proof about general solutions of (1) in the case $r<0<s\neq -r$.

Keywords continuous function, iterated functional equation, dynamical system, general solution.