第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

利用有限局部环 Z/P^mZ 上的2阶交错矩阵构作多个结合类的结合方案*

南 基 洙
(解放军农牧大学数学教研室, 长春130062)

摘 要 本文取有限局部环 Z/P^mZ 上的全体2×2交错矩阵集作为处理的集合, 构作了有 m 个结合类的结合方案, 并且计算出参数

关键词 有限局部环, 交错矩阵, 结合方案
分类号 AMS(1991) 05B/CCL O157

§ 引 言

利用有限域上的矩阵构作结合方案是万哲先先生提出来的 他在文章[1]中利用有限域上2×2埃尔米特矩阵构作了两个结合类的结合方案, 并且计算了参数 后来[2]中把这种构作方法推广到了有限域上的 $n\times n$ 埃尔米特矩阵及一般的 $m\times n$ 矩阵的情形, 也计算了这些结合方案的参数 本文的目的在于用[1], [2]中的思想方法, 利用有限局部环 Z/P^mZ 上的2×2交错矩阵构作多个结合类的结合方案, 并且计算了所作结合方案的参数

§2 交错矩阵与引理

考虑有限局部环是 Z/P^mZ, 其中 P 是整数环 Z 上的素数, m 是正整数 用 $\bar{a}$ 表示环 Z/P^mZ 中的元素, $a\in Z$. 则易知环 Z/P^mZ 的唯一极大理想是 $(\bar{P})$.

设 K 是 Z/P^mZ 上的 $n\times n$ 矩阵 如 $K^t=-K$, 且 K 的主对角线上的元素为0, 则称 K 为交错矩阵 设 K_1 与 K_2 都是 Z/P^mZ 上的 $n\times n$ 交错矩阵, 如果有 $Q\in GL_n(Z/P^mZ)$ 使 $QK_1Q^t=K_2$, 则就说 K_1 与 K_2 是合同的 易见与交错矩阵合同的矩阵一定是交错矩阵

引理1 设 K 是有限局部环 Z/P^mZ 上的2×2交错矩阵, 那么 K 一定合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{P}^i \\ -\bar{P}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad 0\le i\le m,$$

其中当 $i=0$ 时 $\bar{P}^0=\bar{1}$; 当 $i=m$ 时, $\bar{P}^m=\bar{0}$.

证明 设 $K=\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ -K_{12} & 0 \end{pmatrix}$.

如果 $K_{12}\notin(\bar{P})$, 则 K_{12} 为环 Z/P^mZ 上的可逆元素, 所以 K 合同于

* 1993年11月4日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\begin{pmatrix} K_{12}^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ -K_{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{12}^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

如果 $K_{12}\in(\overline{P})$，则不妨设 $K_{12}=\overline{lP^i}, m\geq i>0$，其中 $\overline{l}\notin(\overline{P})$，所以此时 K 合同于

$$\begin{pmatrix} \overline{l}^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \overline{lP^i} \\ -\overline{lP^i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{l}^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \overline{P^i} \\ -\overline{P^i} & 0 \end{pmatrix}.$$

引理2[5] 有限局部环 Z/P^mZ 上方程 $\overline{a_1}x_1+\cdots+\overline{a_n}x_n+\overline{b}=0$ 有解 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的充分必要条件为 $(a_1,\cdots,a_n,P^m)\mid b$，其中 $(a_1,\cdots,a_n,P^m)$ 表示数 $a_1,\cdots,a_n,P^m$ 的最大公因数. 并且方程的解数为 $(P^m)^{n-1}\times(a_1,\cdots,a_n,P^m)$.

引理3 如果在有限局部环 Z/P^mZ 上有 $\overline{aP^r}=\overline{bP^s}$，$0\leq r<s\leq m$，则必有 $\overline{a}\in(\overline{P})$.

证明 如果 $\overline{a}\notin(\overline{P})$，则 $\overline{a}$ 为可逆元素. 所以 $\exists\,\overline{x}\in Z/P^mZ$ 使 $\overline{P^r}=\overline{xP^s}$，即 $\overline{P^r}(1-\overline{xP^{(s-r)}})=0$. 但易见 $1-\overline{xP^{(s-r)}}\notin(\overline{P})$，因此 $\overline{P^r}=0$，矛盾. □

引理4[7]

$$\left|\mathrm{GL}_n(Z/P^mZ)\right| = P^{mn^2}\cdot\prod_{i=0}^{n-1}(1-q^{i-n});\quad \left|\mathrm{SL}_n(Z/P^mZ)\right| = P^{m(n^2-1)}\cdot\prod_{i=0}^{n-2}(1-q^{i-n}).$$

其中 $q=\left|(Z/P^mZ)/(\overline{P})\right|$.

§3 利用2×2交错矩阵构作结合方案

令 E_2 表示有限局部环 Z/P^mZ 上全体2×2交错矩阵构成的集合. 取这些2×2交错矩阵作为处理. 结合关系定义如下: 设 $K_1,K_2\in E_2$，如果存在 $T\in\mathrm{GL}_2(Z/P^mZ)$ 使

$$K_1-K_2=T\begin{pmatrix} 0 & \overline{P^i} \\ -\overline{P^i} & 0 \end{pmatrix}T',$$

则定义 K_1 与 K_2 有第 i 种结合关系. 那么，易证 E_2 对于这 m 个结合关系作成 m 个结合类的结合方案.

事实上，考虑 E_2 的如下变换: $H\to PHP'+H_*$，$\forall H\in E_2$，这里 $P\in\mathrm{GL}_2(Z/P^mZ)$，$H_*\in E_2$. 全体这样的变换组成一个群，设为 G. 那么易知 G 在 E_2 上可迁; 保持任二处理间的结合关系; 而且可迁地作用在具有同一结合关系的处理对上. 因此 E_2 对这 m 个结合关系构成 m 个结合类的结合方案.

下面具体计算参数. 显然，处理的个数 $v=P^m$. 其次，参数 n_i 就是 E_2 中合同于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \overline{P^i} \\ -\overline{P^i} & 0 \end{pmatrix}$ 的交错矩阵的个数.

定理1 有限局部环 Z/P^mZ 上合同于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \overline{P^i} \\ -\overline{P^i} & 0 \end{pmatrix}$ 的2×2交错矩阵个数 $n_i=\dfrac{\left|\mathrm{GL}_2(Z/P^mZ)\right|}{P^i\cdot\left|\mathrm{SL}_2(Z/P^mZ)\right|}=\dfrac{P^m-P^{m-1}}{P^i}$，其中 $0\leq i<m$.

证明 用 D 表示所有与 $S=\begin{pmatrix} 0 & \overline{P^i} \\ -\overline{P^i} & 0 \end{pmatrix}$ 合同的2×2交错矩阵构成的集合.

考虑如下形式的合同交换 $H\to PHP'$，$H\in D$，这里 $P\in\mathrm{GL}_2(Z/P^mZ)$. 由引理1知对每一

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

个 $H\in D$, 存在 $P\in GL_2(Z/P^mZ)$ 使 $PHP' = \begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}\\ -\overline{P^i} & 0\end{pmatrix} = S$, 所以 $GL_2(Z/P^mZ)$ 可迁地作用在 D 上. 令 $GL_2(Z/P^mZ)$ 中使 S 固定的子群为 G, 那么 $|D| = |GL_2(Z/P^mZ)|/|G|$.

计算 $|G|$. 设 $P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}\in GL_2(Z/P^mZ)$ 且有 $P\begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}\\ -\overline{P^i} & 0\end{pmatrix}P' = \begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}\\ -\overline{P^i} & 0\end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}(P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21})\\ -\overline{P^i}(P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}) & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}\\ -\overline{P^i} & 0\end{pmatrix}.$$

又知道 $\det P = P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}\notin(\overline{P})$. 再由引理2, 知道方程 $x\overline{P^i}=\overline{P^i}$ 的解数为 P^i. 当然这些解均不在 $(\overline{P})$ 上. 但容易知道, 使 $\deg P=\det Q$, $P\neq Q$ 的矩阵个数为 $|SL_2(Z/P^mZ)|$. 所以

$$|D| = \frac{|GL_2(Z/P^mZ)|}{P^i\cdot|SL_2(Z/P^mZ)|},$$

定理2 参数

$$P^i_{jk}=\begin{cases}\dfrac{P^m-P^{m-1}}{P^j}, & \text{当 } i>j=k \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{P^m-P^{m-1}}{P^k}, & \text{当 } i=j<k \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{P^m-P^{m-1}}{P^j}, & \text{当 } i=k<j \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{P^m-2P^{m-1}}{P^j}, & \text{当 } i=j=k \text{ 时;}\\[2ex] 0, & \text{其它情况}\end{cases}$$

证明 由于参数 P^i_{ij} 与有第 i 种关系的处理对的选择无关, 为方便不妨取 $H_1=0$, $H_2=\begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}\\ -\overline{P^i} & 0\end{pmatrix}$, 并设 $(H_1,H)=j$, $(H_2,H)=k$. 即 $\exists\, T,Q\in GL_2(Z/P^mZ)$ 使

$$\begin{cases}H = T\begin{pmatrix}0 & \overline{P^j}\\ -\overline{P^j} & 0\end{pmatrix}T',\\[2ex] H = Q\begin{pmatrix}0 & \overline{P^k}\\ -\overline{P^k} & 0\end{pmatrix}Q'+\begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}\\ -\overline{P^i} & 0\end{pmatrix}.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}H = \begin{pmatrix}0 & \overline{P^j}\det T\\ -\overline{P^j}\det T & 0\end{pmatrix},\\[2ex] H = \begin{pmatrix}0 & \overline{P^k}\det Q\\ -\overline{P^k}\det Q & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \overline{P^i}\\ -\overline{P^i} & 0\end{pmatrix}.\end{cases}$$

下面考虑能使 $x, y\notin(\overline{P})$ 的方程

$$x\overline{P^j} = y\overline{P^k}+\overline{P^i} \qquad (*)$$

的关于 x 或 y 的解的个数 α^i_{jk}.

(事实上, 能使 $\begin{pmatrix}0 & x_1\overline{P^r}\\ -x_1\overline{P^r} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & x_2\overline{P^r}\\ -x_2\overline{P^r} & 0\end{pmatrix}$ 成立的交错矩阵的个数为 P^r).

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由引理2知, 若 $\min(j,k) > i$, 则(*)关于 x 与 y 无解, 即 $\alpha_{jk}^i = 0$. 故可设 $i \geq \min(j,k)$.

首先, 考虑当 $i > \min(j,k)$ 时方程(*)的解个数问题. 易知此时必有 $j = k$. 若不然, 不妨设 $\min(j,k) = k < j$, 则方程(*)等价于 $x\overline{P^j} = \overline{P^k}(y + \overline{P^{i-k}})$. 但由引理3知此时必有 $y \in (\overline{P})$, 矛盾. 又这时, 方程(*)等价于 $(x - y)\overline{P^j} = \overline{P^i}$, 而此时方程关于 $x \notin (\overline{P})$ 的解的个数 $\alpha_{jk}^i = P^m - P^{m-1}$, 即 $P_{jk}^i = (P^m - P^{m-1})/P^j$.

其次, 考虑在方程(*)中有 $i = \min(j,k)$ 条件时解的个数 α_{jk}^i. 如果再有 $j \neq k$ 且 $\min(j,k) = j$, 则方程(*)等价于 $(x - 1)\overline{P^j} = y\overline{P^k}$. 故易知此时方程对任意 $y \notin (\overline{P})$ 均有 $x \notin (\overline{P})$ 的解. 所以 $\alpha_{jk}^i = P^m - P^{m-1}$, 即 $P_{jk}^i = \dfrac{P^m - P^{m-1}}{P^k}$; 如果方程(*)再有的条件是 $j \neq k$ 且 $\min(j,k) = k$, 则方程(*)等价于 $x\overline{P^j} = \overline{P^i}(y + 1)$. 故易见, 此时任意 $x \notin (\overline{P})$, 均有 $y \notin (\overline{P})$ 的解. 所以 $\alpha_{jk}^i = P^m - P^{m-1}$, 即 $P_{jk}^i = (P^m - P^{m-1})/P^j$.

最后, 如果 $i = \min(j,k)$ 且 $j = k$, 则从方程(*)知道, 只有能使 $y \notin (\overline{P})$, $(y + 1) \notin (\overline{P})$ 的 y 才能使 $x \notin (\overline{P})$ 的 x 存在. 而易见, 这样的 y 的个数为 $P^m - P^{m-1} - P^{m-1} = P^m - 2P^{m-1}$, 即

$$P_{jk}^i = (P^m - 2P^{m-1})/P^j.$$

参 考 文 献

[1] Wan Zhexian, *Notes on finite geometries and the construction of PBIB designs. Some association schemes and PBIB designs based on finite geometries*, Acta Scientia Sinica, 14: 12(1965), 1872-1876.

[2] 王仰贤, 利用矩阵构作多个结合类的结合方案, 应用数学学报, 3: 2(1980), 97—105.

[3] 万哲先、戴宗铎、冯绪宁、杨本傅, 有限几何与不完全区组设计的一些研究, 科学出版社, 1966.

[4] You Hong and Nan Jizhu, *Some anzahl theorems in vector space over Z/P^kZ*, Acta Mathematica Scientia, 16: 1(1996), 81- 88.

[5] 华罗庚, 数论导引, 科学出版社, 1957.

[6] B. R. McDonald, *Geometric algebra over local rings*, Pure and Appl. Math., Dekker, New York, 1976.

[7] B. R. McDonald, *Linear algebra over commutative rings*, Pure and Appl. Math., Dekker, New York, 1984.

Using 2×2 Alternate Matrices Over Z/P^mZ to Construct an Association Scheme with Several Association Classes

Nan Jizhu

(Dept. of Math., University of Agriculture and Animal Science of PLA, Changchun 130062)

Abstract

In this paper, we take the set of all 2×2 alternate matrices over finite local ring Z/P^mZ as the set of treatments, obtain an association scheme with m associate classes, and whose parameters are also computed.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.