第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

自共轭四元数矩阵特征值的极值原理*

黄 礼 平
(湘潭矿业学院基础科学部, 湘潭411201)

摘 要 本文将Hermite算子特征值的两个一般的极值原理推广到自共轭四元数矩阵, 并给出了几个推论, 同时也去掉了子空间的包含条件.

关键词 自共轭四元数矩阵, 特征值, 极值原理, 广义标准正交
分类号 AMS(1991) 15A33/CCL O151.23

本文证明了自共轭四元数矩阵特征值的两个一般的极值原理, 从而将[1]-[3]中的重要结果推广到四元数体.

设H为实四元数体, $H^{m\times n}$为H上$m\times n$矩阵的集合, $SH^{n\times n}$为n阶自共轭四元数矩阵[4]的集合, A^*为A的共轭转置矩阵. 设$A\in SH^{n\times n}$, 用$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$表示$A$的迹, 按照谢邦杰定义[5,6], 用$\|A\|$表示$A$的行列式, 用$\lambda_1(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$表示$A$的$n$个特征值, 设$H^n$为$H$上$n$维列向量构成的右向量空间, 其中定义了内积$(x,y)=x^*y\ (x,y\in H^n)$, 如果$x^*y=0$, 则称$x$与$y$广义正交. 对于$H^n$中的一组向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$, 如果$\alpha_i^*\alpha_j=\delta_{ij}$(kronecker符号), $1\leq i,j\leq k$, 则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是广义标准正交的. 类似可定义广义正交基, 广义正交补等概念. 设$[\alpha_1,\cdots,\alpha_k]$为由$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$所生成的$H^n$的子空间, $H_U^{n\times k}=\{A\in H^{n\times k}\mid A^*A=I_k,k\leq n\}$.

引理1 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是H^n中任一个右线性无关的向量组, 则存在H^n中的一个广义标准正交的向量组$e_1,\cdots,e_k$, 使得对于$s=1,\cdots,k$都有

$$[\alpha_1,\cdots,\alpha_s]=[e_1,\cdots,e_s]. \tag{1}$$

证明 令$\beta_1=\alpha_1$, $\beta_s=\alpha_s-\sum_{i=1}^{s-1}\beta_i\alpha_s^*\beta_i(\beta_i^*\beta_i)^{-1}$, $s=2,\cdots,k$, $e_i=\beta_i(\beta_i^*\beta_i)^{-\frac{1}{2}}$, 则$e_1,\cdots,e_k$广义标准正交且(1)成立. 证毕.

引理2[7] 设$V_1,V_2\subset H^n$, 则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2). \tag{2}$$

引理3[8] 设$A\in SH^{n\times n}$, $U_k\in H_U^{n\times k}$, 则对于$1\leq i\leq k$有

$$\lambda_{n-k+i}(A)\leq\lambda_i(U_k^*AU_k)\leq\lambda_i(A). \tag{3}$$

引理4 设$1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$, $R_t\subset H^n$, $\dim R_t\geq i_t$, $S_k\subset\cdots\subset S_1\subset H^n$, $\dim S_t\geq n-i_t+1$, $t=1,\cdots,k$, 则存在广义标准正交的$x_t\in R_t$, $t=1,\cdots,k$和广义标准正交的$y_t\in S_t$, $t=1,\cdots,k$使得

* 1994年3月10日收到. 国家自然科学基金资助项目.

$$[x_1, \cdots, x_k] = [y_1, \cdots, y_k]. \tag{4}$$

证明 当 $k = 1$ 时显然成立. 假设对 $k-1$ 的情况 $(k \geq 2)$ 命题成立, 则对于 k, 由归纳假设知存在广义标准正交的 $x_t' \in R_t, t = 2, \cdots, k$ 和广义标准正交的 $y_t \in S_t, t = 2, \cdots, k$ 使得 $[x_2', \cdots, x_k'] = [y_2, \cdots, y_k]$. 令 $S_k' = [y_2, \cdots, y_k] \oplus [y_2, \cdots, y_k]^{\perp} \cap S_1$, 则 $\dim S_k' \geq \dim S_1 \geq n - i_1 + 1$. 令 $P_t = S_k' \cap R_t$, 则 $\dim P_t \geq i_t - i_1 + 1 \geq t, t = 1, \cdots, k$ 且 $P_1 \subset \cdots \subset P_k$. 显然, $x_t' \in P_t, t = 2, \cdots, k$. 不难证明: 存在 $x_t'' \in P_t$ 使得 $x_1'', \cdots, x_k''$ 右线性无关且 $[x_2', \cdots, x_k'] \subset [x_1'', \cdots, x_k'']$. 由引理 1 易知存在广义标准正交的 $x_t \in P_t$, 使得 $[x_1'', \cdots, x_k''] = [x_1, \cdots, x_k]$. 显然, $x_t \in R_t, t = 1, \cdots, k$. 因此, 取单位化向量 $y_1 \in [y_2, \cdots, y_k]^{\perp} \cap [x_1, \cdots, x_k]$, 则 $y_1, \cdots, y_k$ 广义标准正交且 $[y_1, \cdots, y_k] = [x_1, \cdots, x_k]$. 因为 $y_1 \in S_k' \cap [y_2, \cdots, y_k]^{\perp}$, 所以 $y_1 \in S_1$. 证毕.

引理 5[8] 设 $A \in SH^{n\times n}$, 则 $\|A\| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$ 且

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A). \tag{5}$$

引理 6[9] 设 $A = (a_{ij}) \in SH^{n\times n}$, 则

$$(a_{11}, \cdots, a_{nn}) \prec (\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A)). \tag{6}$$

定理 设 $A \in SH^{n\times n}$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 为 A 的特征值, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, 则有:

(i) 如果 $\varphi(t_1, \cdots, t_k)$ 是关于每个变量 $t_i \in R$ 的增函数, 则

$$\varphi(\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}) = \sup_{\substack{S_t \subset H^n \\ \dim S_t = i_t}} \inf_{\substack{X = (x_1, \cdots, x_k) \\ x_t \in S_t, X^* X = I_k}} \varphi(\lambda_1', \cdots, \lambda_k'), \tag{7}$$

其中 $\lambda_1' \geq \cdots \geq \lambda_k'$ 为 $X^* A X$ 的 k 个特征值.

(ii) 如果 $F(t_1, \cdots, t_k)$ 是 R^k 上增的 Schur- 凸函数[10], 则

$$F(\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}) = \sup_{\substack{S_t \subset H^n \\ \dim S_t = i_t}} \inf_{\substack{x_t \in S_t \\ x_r^* x_t = \delta_{rt}}} F(x_1^* A x_1, \cdots, x_k^* A x_k). \tag{8}$$

证明 由[6]知存在 $U = (u_1, \cdots, u_n) \in H_U^{n\times n}$ 使得 $A = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) U$. 因此,

$$A u_i = \lambda_i u_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{9}$$

1) 首先证明: 存在 $P_t \subset H^n$, $\dim P_t = i_t$, 使得任取广义标准正交的 $x_t \in P_t, t = 1, \cdots, k$ 都有

$$\varphi(\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}) \leq \varphi(\lambda_1', \cdots, \lambda_k'). \tag{10}$$

$$F(\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}) \leq F(x_1^* A x_1, \cdots, x_k^* A x_k). \tag{11}$$

事实上, 令 $P_t = [u_1, \cdots, u_{i_t}]$, 则 $\dim P_t = i_t$ 且 $P_1 \subset \cdots \subset P_k$. 任取广义正交的 $x_t \in P_t, t = 1, \cdots, k$, 设 $X = (x_1, \cdots, x_k) \in H_U^{n\times k}$. 将 $x_1, \cdots, x_t$ 扩充为 S_t 的一组广义标准正交基 $x_1, \cdots, x_t, v_{t+1}, \cdots, v_{i_t}$, 令 $V_t = (x_1, \cdots, x_t, v_{t+1}, \cdots, v_{i_t}) \in H_U^{i_t\times i_t}$, 则显然存在 $Q_t \in H_U^{i_t\times i_t}$ 使得 $V_t = (u_1, \cdots, u_{i_t}) Q_t$. 由引理 3 知

$$\begin{aligned} \lambda_t(X^* A X) &\geq \lambda_t((x_1, \cdots, x_t)^* A (x_1, \cdots, x_t)) \geq \lambda_{i_t}(V_t^* A V_t) \\ &\geq \lambda_{i_t}((u_1, \cdots, u_{i_t})^* A (u_1, \cdots, u_{i_t})) = \lambda_{i_t}, \end{aligned} \tag{12}$$

$t = 1, \cdots, k$. 所以由 φ 的递增性知(10) 成立.

另一方面, 由 $x_t \in P_k$ 知 $x_t = \sum_{j=1}^{i_t} u_j \alpha_j, \alpha_j \in H$, 因此对于 $t = 1, \cdots, k$ 有:

$$x_t^* A x_t = \sum_{j=1}^{i_t} \lambda_j (\alpha_j^* \alpha_j) \geq \lambda_{i_t} \sum_{j=1}^{i_t} \alpha_j^* \alpha_j = \lambda_{i_t} \tag{13}$$

因此由 F 的递增性或凸性知(11) 成立

2) 再证明: 任取 $S_t \subset H^n, \dim S_t = i_t$, 存在广义标准正交的 $x_t \in S_t, t = 1, \cdots, k$, 使得

$$\varphi(\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}) \geq \varphi(\lambda_1', \cdots, \lambda_k'). \tag{14}$$

$$F(\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}) \geq F(x_1^* A x_1, \cdots, x_k^* A x_k). \tag{15}$$

事实上, 令 $N_t = [u_{i_t}, u_{i_t+1}, \cdots, u_n]$, 则 $\dim N_t = n - i_t + 1$ 且 $N_1 \supset \cdots \supset N_k$. 由引理 4 知存在广义正交的 $x_t \in S_t, t = 1, \cdots, k$ 和广义标准正交的 $y_t \in N_t, t = 1, \cdots, k$, 使得 $[x_1, \cdots, x_k] = [y_1, \cdots, y_k]$. 设 $X = (x_1, \cdots, x_k), Y = (y_1, \cdots, y_k)$, 则存在 $Q_k \in H_U^{n\times k}$ 使得 $X = YQ_k$. 令 $i_t' = n - i_{k-t+1} + 1, R_t = N_{k-t+1}$, 则 $1 \leq i_1' < \cdots < i_k' \leq n$ 并且 $R_1 \subset \cdots \subset R_t, \dim R_t = i_t'$. 仿照 1) 的证明同理可知

$$\begin{aligned} -\lambda_{k-t+1}(X^* A X) &= \lambda_t(X^*(-A)X) = \lambda_t(Q_k^* Y^*(-A)YQ_k) \\ &\geq \lambda_t(Y^*(-A)Y) \geq \lambda_{i_k'}(-A) = -\lambda_{i_{k-t+1}}. \end{aligned} \tag{16}$$

因此有 $\lambda' \leq \lambda_{i_t}, t = 1, \cdots, k$, 由 φ 的递增性知(14) 成立

另一方面, 由引理 6 知

$$(x_1^* A x_1, \cdots, x_k^* A x_k) \prec (\lambda_1', \cdots, \lambda_k'). \tag{17}$$

因此由 F 的 Schur- 凸性与(14) 知(注意到 F 为增函数):

$$F(\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}) \geq F(\lambda_1', \cdots, \lambda_k') \geq F(x_1^* A x_1, \cdots, x_k^* A x_k).$$

结合 1) 和 2), 易知(7) 和(8) 均成立 证毕

特别, 因为 $\varphi = \sum_{i=1}^{k} t_i$ 与 $\varphi = \prod_{i=1}^{k} t_i (t_i \geq 0)$ 均为增函数, 所以由定理与引理 5 知有:

推论 1 设 $A \in SH^{n\times n}, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 为 A 的特征值, 则

$$\sum_{t=1}^{k} \lambda_{i_t} = \sup_{\substack{S_t \subset H^n \\ \dim S_t = i_t}} \inf_{\substack{X = (x_1, \cdots, x_k) \\ x_t \in S_t, X^* X = I_k}} \operatorname{tr}(X^* A X). \tag{18}$$

推论 2 设 A 为 n 阶半正定自共轭四元数矩阵[4], $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 为 A 的特征值, 则

$$\prod_{t=1}^{k} \lambda_{i_t} = \sup_{\substack{S_t \subset H^n \\ \dim S_t = i_t}} \inf_{\substack{X = (x_1, \cdots, x_k) \\ x_t \in S_t, X^* X = I_k}} \| X^* A X \| \tag{19}$$

由(13), (16) 与引理 6, 仿照定理证明的方法, 不难验证:

推论 3 在推论 1 的条件下, 如果 $c_1 \geq \cdots \geq c_k \geq 0$,

$$\sum_{t=1}^{k} c_t \lambda_{i_t} = \sup_{\substack{S_t \subset H^n \\ \dim S_t = i_t}} \inf_{\substack{x_t \in S_t \\ x_r^* x_t = \delta_{rt}}} \sum_{t=1}^{k} c_t x_t^* A x_t. \tag{20}$$

参 考 文 献

[1] A. R. Amir-Moéz, Duke Math. J., 23(1956), 463-476.
[2] M. Marcus and R. Thompson, Duke Math. J., 24(1957), 43-46.
[3] 王伯英, 数学进展, 15: 4(1986), 431—433.
[4] 谢邦杰, 吉林大学自然科学学报, 2(1980), 19—35.
[5] 谢邦杰, 数学学报, 23: 4(1980), 522—533.
[6] 谢邦杰, 吉林大学自然科学学报, 3(1980), 1—33.
[7] 谢邦杰, 抽象代数学, 上海科学技术出版社, 1982.
[8] 黄礼平, 数学研究与评论, 12: 3(1992), 449—454.
[9] 刘建洲, 谢清明, 数学研究与评论, 12: 3(1992), 379—384.
[10] 王伯英, 控制不等式基础, 北京师范大学出版社, 1990.

Extremun Principles of Eigenvalues for Self-Conjugate Quaternion Matrix

Huang Liping
(Dept. of Basi Sciences, Xiangtan Mining Institute, Xiangtan 411201)

Abstract

This paper extends two general extremun principles of eigenvalues of Hermite operator to the self-conjugate quaternion matrix.

Keywords self-conjugate quaternion matrix, eigenvalues, extremun principle, generalized orthonormalizing