第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

Hardy 空间的等价刻画*

周广才 郑维行
(东南大学数力系，南京210018) (南京大学数学系，210093)

摘 要 设 G 为局部域 $\mathbf{K}$ 上的 $2n+1$ 维 Heisenberg 群. 本文证明了通过各种极大函数定义的 Hardy 空间的等价性，给出了 Hardy 空间的原子分解. 利用这些等价定义及一些卷积算子定理，给出了 Hardy 空间的平方函数刻画——Luzin 面积函数刻画与 Littlewood-Paley 平方函数刻画.

关键词 Heisenberg 群，局部域，Hardy 空间
分类号 AMS(1991) 43A15, 43A80/CCL O174.22

§1 预备知识

设 $\mathbf{K}$ 为局部域，$H^n_{\mathbf{K}}$ 为 $2n+1$ 维 $\mathbf{K}$ 上的 Heisenberg 群. 作为一个流形，$H^n_{\mathbf{K}}=\mathbf{K}\times\mathbf{K}^{2n}$. 对 $(t_i, q_i, p_i)\in H^n_{\mathbf{K}}$，$t_i\in\mathbf{K}$，$q_i, p_i\in\mathbf{K}^n$，$i=1, 2$，$H^n_{\mathbf{K}}$ 上的乘法定义为

$$(t_1, q_1, p_1)\cdot(t_2, q_2, p_2)=(t_1+t_2+p_1q_2, q_1+q_2, p_1+p_2).$$

为简便起见，把 $H^n_{\mathbf{K}}$ 记为 G. G 上的一个非 Archimedes 范 $|\cdot|_H$ 定义为

$$|(t, q, p)|_H=\max\{|t|^{\frac{1}{2}}, |q|, |p|\},$$

其中 $|\cdot|$ 为 $\mathbf{K}$ 或 $\mathbf{K}^n$ 上的非 Archimedes 范. 把 $|\cdot|_H$ 简记为 $|\cdot|$，根据作用元素的不同很容易区别它们. 对 $\lambda\in\mathbf{K}^*=\mathbf{K}\setminus\{0\}$，伸缩映射 D_λ 定义为 $D_\lambda(t, q, p)=(\lambda^2t, \lambda q, \lambda p)$. 对 $x, y\in G$，x 至 y 的距离定义为 $|x^{-1}y|$. 现在定义 G 中的球. 对 $k\in\mathbf{Z}/2=\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots\}$，定义

$$\mathbf{O}=\mathbf{O}_0=\{u\in G: |u|\le 1\}, \mathbf{O}_k=\{u\in G: |u|\le\gamma^k\}, x\mathbf{O}_k=\{u\in G: x^{-1}u\in\mathbf{O}_k\},$$

其中 γ 为一素数幂. 由于 $\mathbf{K}^{2n+1}$ 上的 Lebesgue 测度为 G 上的 Haar 测度，对 $k\in\mathbf{Z}$，$\mathbf{O}_k$ 和 $\mathbf{O}_{k+\frac{1}{2}}$ 的测度分别为

$$|\mathbf{O}_k|=\gamma^{k(2n+2)}, \quad |\mathbf{O}_{k+\frac{1}{2}}|=\gamma^{-(k+1)2n-2(k+\frac{1}{2})}.$$

由于 $|D_\lambda\mathbf{O}_k|=|\lambda|^{2n+2}|\mathbf{O}_k|$，我们称 $Q=2n+2$ 为 G 的齐性维数. 一个类似于局部域的重要性质为：G 中的两球要么分离要么其中一个包含另一个.

类似于局部域情形，G 上的检验函数定义为 $S(G)=\{\varphi: \text{supp}\,\varphi$ 为紧的，φ 在某子群 $\mathbf{O}_s$ 的左右陪集上为常数$\}$. $S(G)$ 上的拓扑可类似定义. $S'(G)$ 为 $S(G)$ 上连续线性泛函张成的空间并

* 1994年4月19日收到

赋予弱 * 拓扑. 我们称 $S'(G)$ 为分布空间.

§2　极大函数定义的 Hardy 空间

设 $t, \alpha \in \mathbf{K}^*$, $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\varphi_t(x) = |t|^{-Q}\varphi(D_{\frac{1}{t}}x) \equiv |t|^{-Q}\varphi(\frac{x}{t})$, 非切向极大函数 $M_\varphi^\alpha f$ 与径向极大函数 $M_\varphi^0 f$ 定义为

$$M_\varphi^\alpha f(x) = \sup_{|x^{-1}y| \le |\alpha t|} |f * \varphi_t(x)|, \quad M_\varphi^0 f(x) = \sup_{t \in \mathbf{K}^*} |f * \varphi_t(x)|.$$

命题2.1　$M_\varphi^\alpha f$ 和 $M_\varphi^0 f$ 为下半连续函数, 因而为可测函数.

如果 $\mathbf{A}$ 为一适当的检验函数的集合, 则总非切向极大函数与总径向极大函数定义为

$$M_{\mathbf{A}}^\alpha f = \sup_{\varphi \in \mathbf{A}} M_\varphi^\alpha f, \quad M_{\mathbf{A}}^0 f = \sup_{\varphi \in \mathbf{A}} M_\varphi^0 f.$$

常规的方法可以证明

定理2.2　对 $\lambda > Q = 2n + 2$, 令

$$\mathbf{A}_\lambda = \{\varphi \in S: |\varphi(x)| \le \max\{1, |x|\}^{-\lambda}\}.$$

对 $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, 令

$$M^{(\lambda)} f(x) = M_{\mathbf{A}_\lambda}^\alpha f,$$

则存在常数 c_λ 与 c_λ' 使得

(1)　$|\{x: M^{(\lambda)} f(x) > s\}| \le c_\lambda \|f\|_1 / s$, 对所有 $f \in L^1$, $s > 0$;

(2)　$\|M^\lambda f\|_p \le c_\lambda' p(p-1)^{-1} \|f\|_p$, 对所有 $f \in L^p$, $1 < p \le \infty$.

推论2.3　如果 φ 为检验函数, 则存在 $A > 0$, $\lambda > Q$ 使得 $|\Phi(x)| \le A(\max\{1, |x|\})^{\{-\lambda\}}$, 因而

(1)　$|\{x: M_\varphi^\alpha f(x) > s\}| \le A c_\lambda \|f\|_{\{1} / s, \}$ 对 $f \in L_1$ 和 $s > 0$;

(2)　$\|M_\varphi^\alpha f\|_p \le A c_\lambda p(p-1)^{\{-1\}} \|f\|_p$, 对 $f \in L^p$, $1 < p \le \infty$.

利用推论2.3可以证明

定理2.4　设 φ 满足推论2.3中的假设, $a = \int \varphi$, 则对 $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, 有

$$\lim_{|x^{-1}y| \le |\alpha t| \to 0} f * \varphi_t(y) = af(x) \quad \text{几乎处处成立.}$$

设 u 为 $G \times \mathbf{K}^*$ 上的连续函数. 对 $\alpha \in \mathbf{K}^*$ 和 $\lambda > 0$, 令

$$u_\alpha^* = \sup_{|x^{-1}y| \le |\alpha t|} |u(y, t)|, \quad u_\lambda^{**} = \sup_{y \in G,\, t \in \mathbf{K}^*} |u(y, t)| \left(\frac{|t|}{|x^{-1}y| + |t|}\right)^\lambda.$$

则类似于[2]中定理4.1的证明方法可得

命题2.5　如果 $0 < p < \infty$, $\lambda > Q/p$, 则存在仅依赖于 α, λ 和 p 的常数 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, 使得

$$c_1 \|u_\alpha^*\|_p \le \|u_\lambda^{**}\|_p \le c_2 \|u_\alpha^*\|_p.$$

由上面命题立得

推论2.6　(1) 如果 $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\lambda > 0$, 定义切向极大函数 $T_\varphi^\lambda f$ 为

$$T_\varphi^\lambda f(x) = \sup_{y \in G,\, t \in \mathbf{K}^*} |f * \varphi_t(y)| \left(\frac{|t|}{|x^{-1}y| + |t|}\right)^\lambda,$$

则$M_\varphi^\alpha f\in L^p$当且仅当$T_\varphi^\lambda f\in L^p$, 其中$\lambda>Q/p$, 且$\|M_\varphi^\alpha f\|_p\sim\|T_\varphi^\lambda f\|_p$.

(2) 在定义非切向极大函数$M_\varphi^\alpha f$时可以任意改变$\alpha\in\mathbf{K}^*$的值而不改变$M_\varphi^\alpha f$的L^p性质, 因此常假设$\alpha=1$并简记$M_\varphi^1 f$为$M_\varphi f$.

推论2.7 $\|M_\varphi f\|_p\sim\|M_\varphi^0 f\|_p$.

证明 假设φ在$\mathbf{O}_l$的左右陪集上为常数, 有

$$M_\varphi^0 f=\sup_{t\in\mathbf{K}^*}|f*\varphi_t(x)|=\sup_{|x^{-1}y|<\gamma^l|t|}|f*\varphi_t(y)|=M_\varphi^\alpha f(x),$$

其中$|\alpha|=\gamma^l$. 因此$\|M_\varphi^0 f\|_p\sim\|M_\varphi^\alpha f\|_p\sim\|M_\varphi f\|_p$.

容易证明$1\le p\le\infty$时, 如果$M_\varphi^0 f\in L^p$则$f\in L^p$, 因此当$p>1$时, 由定理2.2可得

$$\|M_\varphi^0 f\|_p\sim\|M_\varphi^\alpha f\|_p\sim\|M^{(\lambda)}f\|_p\sim\|f\|_p.$$

当$p\le1$时, 我们对$\mathbf{A}_\lambda$要求多一些, 为此定义

$$\mathbf{A}_{k,l}=\{\varphi\in S:\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbf{O}_k,\ \varphi\text{在}\mathbf{O}_l\text{的左右陪集上为常数},\ \int|\varphi|\le1\},$$

$$M_{k,l}f(x)=\sup_{\varphi\in\mathbf{A}_{k,l}}M_\varphi f(x).$$

则有

定理2.8 假设$\varphi\in S$, $\int\varphi=1$, 则存在$c>0$使得$M_{k,l}f(x)\le cT_\varphi^N f(x)$对所有$N\in\mathbf{N}$和$f\in S'$, $x\in G$成立.

证明 因为$\varphi\in S$, 可以假设$\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbf{O}_m$. 如果$\psi\in\mathbf{A}_{k,l}$, $t\in\{x\in\mathbf{K}:|x|=\gamma^{m-l}\}$, 则

$$\varphi_t*\psi(x)=\psi*\varphi_t(x)=\psi(x).$$

因而

$$|f*\psi_s(y)|=|f*\varphi_{st}*\psi_s(y)|\le\int_G|f*\varphi_{st}(gz^{-1})||\psi_s(z)|dz$$

$$\le\int_G T_\varphi^N f(x)\left(\frac{|x^{-1}yz^{-1}|+|st|}{|st|}\right)^N|\psi_s(z)|dz$$

$$=T_\varphi^N f(x)\int_G\left(\frac{|x^{-1}y(D_sw^{-1})|+|st|}{|st|}\right)^N|\psi(w)|dw.$$

由于$|D_sw^{-1}|=|s||w|$, 对$|x^{-1}y|<|x|$, 有

$$|x^{-1}y(D_sw^{-1})|\le|s|\max\{1,|w|\}=|s|\langle w\rangle.$$

因此

$$\sup_{|x^{-1}y|\le|s|}|f*\psi_s(y)|\le T_\varphi^N f(x)\int_G\left(\frac{|s|\langle w\rangle+|st|}{|st|}\right)^N|\psi(w)|+dw\le c_N T_\varphi^N f(x).$$

这样便证明了$M_{k,l}f(x)\le c_N T_\varphi^N f(x)$.

由定理2.8与推论2.6立得

推论2.9 (1) 对$0<p\le\infty$, $\varphi\in S$, $\int\varphi\ne0$, $\|M_\varphi f\|_p\sim\|M_{k,l}f\|_p$;

(2) 对$0<p\le\infty$, $\varphi,\psi\in S$, $\int\varphi\ne0$, $\int\psi\ne0$, $\|M_\varphi f\|_p\sim\|M_\psi f\|_p$.

由此可证明

定理2.10 如果$0<p\le\infty$, $\lambda>Q/p$, $\varphi,\psi\in S$, $\int\varphi\ne0$, $\int\psi\ne0$, 则有

$$\|M_\varphi^0 f\|_p\sim\|M_\varphi f\|_p\sim\|T_\varphi^\lambda f\|_p\sim\|T_\psi^\lambda f\|_p\sim\|M_\psi^0 f\|_p\sim\|M_\psi f\|_p\sim\|M_{k,l}f\|_p.$$

由此定理可由Mf 来表示上面讨论的任一种极大函数. 简单起见常取$Mf = M_{\Phi}f$, 其中Φ为O的示性函数. 因此可以定义Hardy 空间$H^p(G)$为

$$H^p(G) = \{f \in S' : Mf \in L^p\}.$$

§3 Hardy 空间的原子分解

设$0 < p \leq 1, 1 \leq q \leq \infty, p < q$. 一个$(p,q)$-原子为$L^q$中的紧支集函数$a$使得

(1) 存在一球B使得 $\operatorname{supp} a \subset B$, $\|a\|_q \leq |B|^{1/q - 1/p}$;

(2) $\int a(x)dx = 0$.

常规方法可证

命题3.1 对每个(p,q)-原子a, $\|Ma\|_p \leq 1$.

定义原子Hardy 空间$H^{p,q}(G)$为

$$H^{p,q}(G) = \{f \in S' : f = \sum_1^{\infty} \lambda_i a_i (\text{在分布意义下}), a_i \text{为}(p,q)\text{-原子}, (\sum_1^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p} < \infty\}.$$

如果$f \in H^{p,q}$, $f = \sum \lambda_i a_i$, 则我们称此式为f的原子分解. 此表示式不是唯一的, 定义$\|f\|_{H^{p,q}}$为

$$\|f\|_{H^{p,q}} = \inf\{(\sum |\lambda_i|^p)^{1/p} : \sum \lambda_i a_i \text{为} f \text{的}(p,q)\text{-原子分解}\}.$$

类似于经典情形, 我们有

命题3.2 $H^{p,q} \subset H^p \subset S'$, 且是连续嵌入.

利用此命题可证

命题3.3 H^p是完备空间.

定理3.4 如果$0 < p \leq 1$, 则$H^p \subset H^{p,\infty}$且是连续嵌入.

证明 利用$H^p \cap L^1$在H^p中的稠密性, 函数的Calderón-Zygmund 分解可以证明之.

推论3.5 设$0 < p \leq 1, 1 \leq q \leq \infty, p < q$, 则$H^{p,q} = H^p$.

证明 易证如果$1 \leq q < r \leq \infty$, 则(p,r)-原子也为(p,q)-原子, 因而$H^{p,r} \subset H^{p,q}$. 故$H^p \subset H^{p,\infty} \subset H^{p,r} \subset H^p$, 且是连续嵌入. 因此$H^{p,q} = H^p$.

§4 Hardy 空间的平方函数刻画

设$f \in S'$, $\alpha \in K^*$, $\varphi \in S$ 且$\int \varphi = 0$. Luzin 面积函数$S_\varphi^\alpha f$定义为

$$S_\varphi^\alpha f(x) = \left[\int_{K^*} \int_{|x^{-1}y| < |\alpha|} |f * \varphi_t(y)|^2 |t|^{-Q-1} dy\,dt\right]^{1/2}.$$

设$0 < \lambda < \infty$, Littlewood-Paley 函数$g_\varphi f$和$G_\varphi^\lambda f$定义为

$$g_\varphi f(x) = \left[\int_{K^*} |f * \varphi_t(x)|^2 |t|^{-1} dt\right]^{1/2},$$

$$G_\varphi^\lambda f(x) = \left[\int_{K^*} \int |f * \varphi_t(y)|^2 \left(\frac{|t|}{|t| + |x^{-1}y|}\right)^{2\lambda} |t|^{-Q-1} dy\,dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

类似于经典情形的结果,有

定理4.1 假设$0<p\le 2$且$0<|\beta|\le|\alpha|<\infty$. 如果$S_\varphi^\beta f\in L^p$,则$S_\varphi^\alpha f\in L^p$,且存在仅依赖于$p$的常数$c$使得

$$\|S_\varphi^\alpha f\|_p\le c(|\alpha/\beta|)^{Q/p}\|S_\varphi^\beta f\|_p.$$

推论4.2 对$0<p\le 2$, $\alpha,\beta\in\mathbf{K}^*$, $\|S_\varphi^\alpha f\|_p\sim\|S_\varphi^\beta f\|_p$.

推论4.3 假设$0<p\le 2$, $\lambda>Q/p$. 如果$S_\varphi^1 f\in L^p$,则$G_\varphi^\lambda f\in L^p$,且$\|G_\varphi^\lambda f\|_p\le c_{\lambda,p}\|S_\varphi^1 f\|_p$. 进一步,$\|G_\varphi^\lambda f\|_p\sim\|S_\varphi^1 f\|_p$.

证明 由于$(G_\varphi^\lambda f(x))^2\le(S_\varphi^1 f(x))^2+\sum_0^\infty(1+\mathscr{P}^k)^{-2\lambda}(S_\varphi^{\alpha_k}f(x))^2$,其中$|\alpha_k|=\mathscr{P}^{k+1}$,利用定理4.1可得$\|G_\varphi^\lambda f\|_p\le c_{\lambda,p}\|S_\varphi^1 f\|_p$. 又由于$S_\varphi^1 f(x)\le 2^\lambda G_\varphi^\lambda f(x)$,此推论得证.

定理4.4 如果$\psi\in S$, $\lambda>0$,则存在常数$c>0$使得对所有$f\in S'$, $x\in G$, $\varphi\in S$(满足$\int\varphi=0$)有

$$S_{\varphi*\psi}^1 f(x)\le cG_\varphi^\lambda f(x).$$

由推论4.3及定理4.4可得

推论4.5 如果$0<p\le 2$, $S_\varphi^1 f\in L^p$,则$S_{\varphi*\psi}^1 f\in L^p$,且$\|S_{\varphi*\psi}^1 f\|_p\le c_{p,\psi}\|S_\varphi^1 f\|_p$.

现在着手揭示H^p空间与Luzin面积函数、Littlewood-Paley函数之间的关系.

定理4.6 如果$\varphi\in S$,且$\int\varphi=0$,则对$0<p<\infty$,映射$f\to g_\varphi f$是H^p到L^p有界的.

证明 利用Hardy空间上算子的插值、向量值Hardy空间上一类卷积型算子的有界性可以证明此定理.

定理4.7 如果$\varphi\in S$,且$\int\varphi=0$, $\alpha\in\mathbf{K}^*$,则对$0<p<\infty$,映射$f\to S_\varphi^\alpha f$是H^p到L^p有界的.

对$f\in S'$,称f在无穷远处弱消失,如果对任意$\varphi\in S$,当$|t|\to\infty$时,在S'中$f*\varphi_t\to 0$. 易证如果$f\in H^p(0<p<\infty)$,则f在无穷远处弱消失. 因此在下面定理中弱消失条件是必要的.

定理4.8 设

$$0<p<\infty,\ \varphi^1,\cdots,\varphi^N,\ \psi^1,\cdots,\psi^N\in S,\quad\int\varphi^j=\int\psi^j=0,\ 1\le j\le N,$$

且

$$\sum_1^N\int_{K^*}\varphi_t^j*\psi_t^j\,dt/|t|=\delta\ (\text{Dirac 函数}).$$

如果f在无穷远弱消失,对$\alpha\in\mathbf{K}^*$和$1\le j\le N$有$g_{\varphi^j}f\in L^p$或$S_{\varphi^j}^\alpha f\in L^p$,则$f\in H^p$,且

$$\|f\|_{H^p}\le c_p\sum_1^N\|g_{\varphi^j}f\|_p,\quad\|f\|_{H^p}\le c_p\sum_1^N\|S^{\varphi^j}f\|_p.$$

该定理的证明思路类似于经典情形.

令Φ_k为$\mathfrak{O}_k$的示性函数,$f\in S'$,定义$f(x,k)$为$f(x,k)=\mathscr{P}^{kQ}f*\Phi_k(x)$,称之为$f$的右正则化函数. 利用定理4.8可得:

推论4.9 $f\in S'$,且f在无穷远处弱消失,则$f\in H^p$当且仅当

$$\Big[\sum_{-\infty}^\infty|f(x,k)-f(x,k-1)|^2\Big]^{1/2}\in L^p\ (0<p<\infty),\text{且}$$

$$\|f\|_{H^p} \sim \left\| \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \left| f(x,k) - f(x,k-1) \right|^2 \right]^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

参 考 文 献

[1] M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton University Press, 1975.

[2] G. B. Folland and E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Math. Notes 28, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1982.

[3] R. R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. AMS 83 (1977), 569-645.

[4] Zhou Guangcai, *Harmonic analysis on Heisenberg group over local fields*, Ph. D. Dissertation, Nanjing University, 1993.

Equivalent Characterizations of Hardy Spaces

Zhou Guangcai

(Southeast University, Nanjing 210018)

Zheng Weixing

(Dept. of Math., Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract

Let G be the $(2n+1)$-dimensional Heisenberg group over a local field **K**. In this paper we prove the equivalence of Hardy spaces defined by some kinds of maximal functions and give the atomic decomposition of Hardy spaces. Applying these equivalent definitions and some convolution operator theorems, we characterize Hardy spaces by square functions-Luzin area functions and Littlewood-Paley functions.

Keywords Heisenberg group, local field, Hardy space.