第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

调和映照与常平均曲率的曲面*

王 红
(西北工业大学应用数学系, 西安710072)

摘 要 本文利用三维欧氏空间R^3或三维Minkowski空间R^{21}中常平均曲率的曲面与Sinh-Laplace方程和Sinh-Gordon方程之间的关系, 研究了常平均曲率的曲面与R^2到S^2(或H^2)及R^{11}到$S^{11}(+1)$的调和映照之间的内在联系, 并且提供了一种构造到球面S^2, H^2和$S^{11}(+1)$的调和映照的方法

关键词 常平均曲率的曲面, 高斯映照, 调和映照, Sinh-Laplace方程, Sinh-Gordon方程

分类号 AMS(1991) 53C42/CCL O186.16

§1 引 言

在与曲面的常平均曲率有关的许多问题中, 最有影响的猜想之一是Hopf猜想 1985年, H. C. Wente[1]构造出了浸入在三维欧氏空间R^3中常平均曲率的环面, 这给出了Hopf猜想的一个反例 我们注意到: 在Wente构造环面的过程中, 其中重要一步是在R^3中选取了一组特殊的等温坐标, 使得常平均曲率的曲面与Sinh-Laplace方程建立了某种内在的联系 继Wente之后, 构造具有常平均曲率的曲面变得更为吸引人了[2].

另一方面, 在文献[3]中我们分别找到了三维Minkowski空间R^{31}中常平均曲率的类空曲面和类时曲面上一组适当的等温坐标, 使得我们能将R^{21}中常平均曲率的曲面与特殊的Sinh-Laplace方程和Sinh-Gordon方程建立了某种内在的联系 进一步, 从Sinh-Laplace方程, Sinh-Gordon方程的解出发, 利用上述关系分别构造出了R^{21}中具有平均曲率$\frac{1}{2}$的完备的类空曲面和类对曲面 本文将继续利用R^3或R^{31}中常平均曲率的曲面与Sinh-Laplace方程, Sinh-Gordon方程之间的关系以及"R^3或R^{21}中曲面的平均曲率为常数的充要条件是曲面的高斯映照为调和映照"这一重要事实, 研究了常平均曲率的曲面与R^2到S^2(或H^2)及R^{11}到$S^{11}(+1)$的调和映照之间的内在联系, 并且提供了一种构造到球面S^2, H^2和$S^{11}(+1)$的调和映照的方法

* 1994年3月21日收到 国家自然科学基金资助项目

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

§2 常平均曲率的曲面与 Sinh-Laplace 方程和 Sinh-Gordon 方程

首先, 将三维Minkowski空间$R^{2,1}$中常平均曲率的类时曲面与 Sinh-Gordon 方程建立联系

设M 是$R^{2,1}$中无脐点的类时曲面, $\{P, e_1, e_2, e_3\}$是M 上一个Lorentz 单位正交标架, 满足$e_1^2 = e_3^2 = 1, e_2^2 = -1$, 而且$e_1, e_2$与$M$ 相切, e_3是M 的单位法向量 设$\omega^i (i = 1, 2, 3)$是e_i的对偶1-形式, 则曲面M 的基本方程可以表示为

$$\begin{cases} dP = \omega^1 e_1 - \omega^2 e_2, \\ de_a = \sum_b \omega_a^b e_b + \omega_a^3 e_3 \quad (a, b = 1, 2), \\ de_3 = \sum_a \omega_3^a e_a, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

$$\omega_1^2 = \omega_2^1, \omega_3^1 = -\omega_1^3, \omega_3^2 = \omega_2^3. \tag{2.2}$$

由于$\omega^3 = 0$, 由Cartan 引理可知: $\omega_a^3 = \sum_b h_{ab}\omega^b (a, b = 1, 2)$, 并且$h_{ab} = h_{ba}$. 如果我们选取$e_1, e_2$是$M$ 的主方向, 则$\omega_a^3 = k_a \omega^a (a = 1, 2)$. 此时, 曲面$M$ 的第一、第二基本形式可表为:

$$\mathrm{I} = \langle dP, dP \rangle = (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2, \quad \mathrm{II} = k_1 (\omega^1)^2 - k_2 (\omega^2)^2.$$

注意到k_1和k_2是曲面M 的主曲率, 于是, 曲面M 的 Gauss 曲率和平均曲率分别为:

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \tag{2.3}$$

可以适当选取坐标参数, 使得$\omega^1 = \lambda du, \omega^2 = \mu dv$, 其中$\lambda = \lambda(u, v), \mu = \mu(u, v)$均为可微函数 进一步, 假定$M$ 是$R^{2,1}$中具有常平均曲率$H = \frac{1}{2}$的类时曲面, 由(2.3)可得$k_1 + k_2 = 1$. 注意到M 上没有脐点, 令: $k_1 = \frac{1}{2}(1 + e^{-\alpha}), k_2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-\alpha})$, 其中$\alpha = \alpha(u, v)$为可微函数 由曲面$M$ 的基本方程(2.1)的可积性条件知: $\lambda = \mu = e^{\frac{\alpha}{2}}$, 并且$\alpha$满足- Sinh-Gordon 方程:

$$\alpha_{uu} - \alpha_{vv} + \mathrm{sh}\alpha = 0. \tag{2.4}$$

此时, 曲面M 的第一、第二基本形式为:

$$\begin{cases} \mathrm{I} = e^{\alpha}(du^2 - dv^2), \\ \mathrm{II} = e^{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} du^2 - \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} dv^2). \end{cases} \tag{2.5}$$

若记$\Phi = (m, n, l)^T = (e_1, e_2, e_3)^T$. 则线性系统:

$$\Phi_u = U\Phi, \quad \Phi_v = V\Phi, \quad U, V \in SO(2,1) \tag{2.6}$$

是可积的, 其中

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_v}{2} & \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha_v}{2} & 0 & 0 \\ -\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_u}{2} & 0 \\ \frac{\alpha_u}{2} & 0 & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

同理, 可以建立 R^3 中常平均曲率的曲面以及 R^{21} 中常平均曲率的类空曲面与 ± Sinh-Laplace 方程之间的联系. 现将文献[1]和[3]中的研究结果总结如下:

定理1 设 M 是 R^3 或 R^{21} 中无脐点的常平均曲率 $\frac{1}{2}$ 的曲面, 那么存在一组局部等温坐标使得 M 具有如下的第一、第二基本形式:

曲面	符号	第一基本形式	第二基本形式	方程
$M\subset R^{21}$	$+,-$	$e^{\alpha}(du^2-dv^2)$	$e^{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}du^2-\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}dv^2)$	$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}+\mathrm{sh}\alpha=0$
$M\subset R^{21}$	$+,+$	$e^{\alpha}(du^2+dv^2)$	$-e^{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}du^2+\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}dv^2)$	$\alpha_{uu}+\alpha_{vv}-\mathrm{sh}\alpha=0$
$M\subset R^{3}$	$+,+$	$e^{\alpha}(du^2+dv^2)$	$e^{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}du^2+\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}dv^2)$	$\alpha_{uu}+\alpha_{vv}+\mathrm{sh}\alpha=0$

进一步, 设 $\{e_i\}(i=1,2,3)$ 为 M 上与上述局部等温坐标相容的一个欧氏或 Lorentz 单位正交标架场, 使得 e_1, e_2 与 M 相切, e_3 为 M 的法向量. 记 $\Phi=(m,n,l)^T=(e_1,e_2,e_3)^T$. 线性系统: $\Phi_u=U\Phi$, $\Phi_v=V\Phi$ 是可积的, 其中: 若 M 是 R^{21} 中类时曲面, 则 $U,V\in SO(2,1)$,

$$U=\begin{bmatrix}0 & \frac{\alpha_v}{2} & \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\\ \frac{\alpha_v}{2} & 0 & 0\\ -\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}0 & \frac{\alpha_u}{2} & 0\\ \frac{\alpha_u}{2} & 0 & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\\ 0 & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} & 0\end{bmatrix};$$

若 M 是 R^{21} 中类空曲面, 则 $U,V\in SO(2,1)$,

$$U=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\alpha_v}{2} & \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\\ \frac{\alpha_v}{2} & 0 & 0\\ \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}0 & \frac{\alpha_u}{2} & 0\\ -\frac{\alpha_u}{2} & 0 & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\\ 0 & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} & 0\end{bmatrix};$$

若 M 是 R^3 中曲面, 则 $U,V\in SO(3)$.

$$U=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\alpha_v}{2} & \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\\ \frac{\alpha_v}{2} & 0 & 0\\ -\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}0 & \frac{\alpha_u}{2} & 0\\ -\frac{\alpha_u}{2} & 0 & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\\ 0 & -\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} & 0\end{bmatrix}.$$

定理1表明: 对于 R^3 或 R^{21} 中具有常平均曲率 $\frac{1}{2}$ 的曲面, 在适当选取的等温坐标下, ± Sinh-Laplace 方程或 - Sinh-Gordon 方程恰是曲面的基本方程的可积条件.

§3 常平均曲率的曲面与调和映照

设 M 是 R^{21} 中无脐点的类时曲面, 在局部坐标 (u,v) 下, $\{P, e_1, e_2, e_3\}$ 是 M 上一个 Lorentz

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

单位正交标架, 满足 $e_1^2 = e_3^2 = 1, e_2^2 = -1$, 而且 e_1, e_2 与 M 相切, e_3 是 M 的法向量. 由曲面 M 的 Gauss 映照 $e_3: M \to S^{1,1}(+1)$ 确定的映照 $l: R^{1,1} \to S^{1,1}(+1)$ 使得 $l(u,v) = e_3(u,v)$ 仍称为 M 的 Gauss 映照. 由参考文献[4]可知: l 为调和映照, 并且 l 满足调和映照方程:

$$l_{uu} - l_{vv} + (l_u^2 - l_v^2) \cdot l = 0. \tag{3.1}$$

进一步, 若 l 满足规范条件:

$$l_u^2 + l_v^2 = 1, \quad l_u \cdot l_v = 0, \tag{3.2}$$

则称 l 为规范调和映照. 另一方面, 由参考文献[5]可知: R^3 或 $R^{2,1}$ 中曲面的平均曲率为常数的充要条件是曲面的 Gauss 映照为调和映照. 这样, 结合上节关于常平均曲率曲面的研究, 可以将调和映照 $l: R^{1,1} \to S^{1,1}(+1)$ 与 - Sinh-Gordon 方程建立联系.

命题1 设 M 是 $R^{2,1}$ 中无脐点的常平均曲率为 $\frac{1}{2}$ 的类时曲面, (u,v) 为由定理1确定的局部等温坐标, 那么存在函数 $\alpha(u,v)$ 满足 Sinh-Gordon 方程 $\alpha_{uu} - \alpha_{vv} + \mathrm{sh}\alpha = 0$ 与 M 的 Gauss 映照 $l: R^{1,1} \to S^{1,1}(+1)$ 满足调和映照方程(3.1)和规范条件(3.2)是等价的.

证明 若 M 是 $R^{2,1}$ 中无脐点的常平均曲率为 $\frac{1}{2}$ 的类时曲面, 由定理1可知: 存在局部等温坐标 (u,v) 及可微函数 $\alpha(u,v)$ 满足 - Sinh-Gordon 方程 $\alpha_{uu} - \alpha_{vv} + \mathrm{sh}\alpha = 0$, 并且线性系统(2.6)和(2.7)是可积的. 对于 M 的 Gauss 映照 $l: R^{1,1} \to S^{1,1}(+1)$. 由 $l(u,v) = e_3(u,v)$ 可知: $l^2(u,v) = 1$. 再由(2.6)和(2.7)可得:

$$l_u = -\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} m, \quad l_v = \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} n. \tag{3.3}$$

注意到 m, n, l 两两彼此正交, 并且 $m^2(u,v) = e_1^2(u,v) = 1, n^2(u,v) = e_2^2(u,v) = -1$. 于是, 由(3.3)可得:

$$l_u^2 + l_v^2 = 1, \quad l_u \cdot l_v = 0.$$

对以上两式微分, 可得: $l_{uu} - l_{vv} + (l_u^2 - l_v^2) l = 0$. 即 l 满足调和映照方程(3.1)和规范条件(3.2).

反之, 若曲面 M 的 Gauss 映照 $l: R^{1,1} \to S^{1,1}(+1)$ 是一个规范调和映照, 由规范条件(3.2), 令

$$\begin{aligned} l_u &= -\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} m, & l_v &= \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} n, \\ m_u &= \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} l + A n, & m_v &= B n, \\ n_u &= A m, & n_v &= \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} l + B m, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 m, n, l 两两彼此正交, 并且 $m^2 = l^2 = 1, n^2 = -1, \alpha = \alpha(u,v), A = A(u,v), B = B(u,v)$ 均为可微函数. 将(3.4)代入调和映照方程(3.1), 可得: $A = \frac{\alpha_v}{2}, B = \frac{\alpha_u}{2}$. 再由系统(3.4)的可积性, α 必须满足 - Sinh-Gordon 方程 $\alpha_{uu} - \alpha_{vv} + \mathrm{sh}\alpha = 0$. 证毕.

同理, 对 R^3 (或 $R^{2,1}$) 中无脐点的常平均曲率 $\frac{1}{2}$ 的曲面(或类空曲面)可以做相应的讨论. 将研究结果总结如下:

定理2 设 M 是 R^3 或 $R^{2,1}$ 中无脐点的常平均曲率 $\frac{1}{2}$ 的曲面, 在定理1确定的局部等温坐标下, 将 M 的 Gauss 映照满足的调和映照方程和规范条件以及与它们等价的 α-方程表示如下:

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

曲面	符号	Gauss 映照	调和映照方程	规范条件	α 方程
$M\subset R^{2\,1}$	$+,-$	$l: R^{1\,1}\to S^{1\,1}(+1)$	$l_{uu}-l_{vv}+(l_u^2-l_v^2)l=0$	$\begin{cases} l_u^2+l_v^2=1 \\ l_u\cdot l_v=0 \end{cases}$	$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}+\mathrm{sh}\alpha=0$
$M\subset R^{2\,1}$	$+,+$	$l: R^2\to H^2$	$l_{uu}+l_{vv}-(l_u^2+l_v^2)l=0$	$\begin{cases} l_u^2-l_v^2=1 \\ l_u\cdot l_v=0 \end{cases}$	$\alpha_{uu}+\alpha_{vv}-\mathrm{sh}\alpha=0$
$M\subset R^3$	$+,+$	$l: R^2\to S^2$	$l_{uu}+l_{vv}+(l_u^2+l_v^2)l=0$	$\begin{cases} l_u^2-l_v^2=1 \\ l_u\cdot l_v=0 \end{cases}$	$\alpha_{uu}+\alpha_{vv}+\mathrm{sh}\alpha=0$

定理2 表明: 若 $\alpha(u,v)$ 是单连通区域 $\Omega\subset R^2$ (或 $\Omega\subset R^{1\,1}$) 上 $\pm$Sinh-Laplace 方程 (或 $-$ Sinh-Gordon 方程) 的一个解, 则解定理1中相应线性系统可得 $d: \Omega(\subset R^2)\to S^2$ 或 H^2 (或 $l: \Omega(\subset R^{1\,1})\to S^{1\,1}(+1)$) 的一个规范调和映照. 由此提供了一种构造到球面 S^2, H^2 和 $S^{1\,1}(+1)$ 的调和映照的方法. 例如: 在文献[3]中, 构造 $R^{2\,1}$ 中具有平均曲率 $\frac{1}{2}$ 的完备的类时曲面和类空曲面的过程中, 分别确定了一族规范调和映照 $l_{(\lambda,\mu)}: R^{1\,1}\to S^{1\,1}(+1)$ 和 $\tilde{l}_{(\lambda,\mu)}: R^2\to H^2$.

最后, 对于任意 $l: R^2\to S^2$ (或 H^2, 或 $l: R^{1\,1}\to S^{1\,1}(+1)$) 为调和映照, 可以证明它就是 R^3 或 $R^{2\,1}$ 中某个常平均曲率曲面的 Gauss 映照. 将其写为下述定理:

定理3 设 Ω 是 R^2 (或 $R^{1\,1}$) 中单连通区域, 对于任意给定的调和映照 $l: \Omega\to S^2$ (或 H^2, 或 $l: \Omega(\subset R^{1\,1})\to S^{1\,1}(+1)$) 必存在 R^3 (或 $R^{2\,1}$) 中一个常平均曲率为 $\frac{1}{2}$ 的正则曲面 M (或类空曲面, 或类时曲面), 其 Gauss 映照 G 满足 $G\circ\varphi=l$. 这里 $\varphi: \Omega\to M$ 是共形映照, 使得 $(u,v)\in\Omega$ 是曲面 M 上由定理1确定的局部等温坐标.

证明 先对 $l: \Omega(\subset R^{1\,1})\to S^{1\,1}(+1)$ 为调和映照的情形证明. 由文献[6, 7]知: 任一调和映照 $l: \Omega\to S^{1\,1}(+1)$ 是一个共形映照 φ 与一个由解 $-$ Sinh-Gordon 方程 $\alpha_{uu}-\alpha_{vv}+\mathrm{sh}\alpha=0$ 和线性系统(2.6)和(2.7)所得的规范调和映照 G 的乘积, 即: $l=G\circ\varphi$. 因此, 只须证明: 在 $R^{2\,1}$ 中存在一个曲面 M, 使其 Gauss 映照恰为 G 即可! 对于 G 而言, 设 $\alpha_0(u,v)$ 是方程 $\alpha_{uu}-\alpha_{vv}+\mathrm{sh}\alpha=0$ 在 Ω 上的一个解, 则线性系统(2.6)和(2.7)关于 $\alpha_0(u,v)$ 是完全可积的. 于是曲面的基本方程(2.1)中第三式是可积的. 另一方面, 对于如下的第一、第二基本形式:

$$\begin{cases} \mathrm{I}=e^{\alpha_0}(du^2-dv^2), \\ \mathrm{II}=e^{\frac{\alpha_0}{2}}\left(\mathrm{ch}\frac{\alpha_0}{2}du^2-\mathrm{sh}\frac{\alpha_0}{2}dv^2\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

其系数所满足的 Gauss 方程恰为 $-$ Sinh-Gordon 方程. 因此, 曲面的基本方程(2.1)中第一、第二式也是可积的. 于是, 从曲面基本方程(2.1)可以确定一个曲面 M_0. 而且 M_0 的平均曲率 $H_0=\frac{1}{2}$, M_0 的 Gauss 映照为 G.

类似于上述方法, 可以证明: 对于 $l: \Omega(\subset R^2)\to S^2$ 或 H^2 为调和映照的情形, 定理3中的结论也成立. 证毕.

作者感谢胡和生教授的指导和鼓励.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

[1] H. C. Wente, *A counterexample to a conjecture of hopf*, Pacific. J. Math., 121(1987), 193-243.

[2] R. M. Schoen, *A report on some recent progress on nonlinear problems in geometry*, Surveys in Differential Geometry, 1(1991), 201-241.

[3] H. Wang, *The Construction of Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space*, The Proceedings of the Symposium on Differential Geometry in Honor of Prof. Su Buching, 1993.

[4] 谷超豪等, 孤立子理论与应用, 浙江科学技术出版社, 1990.

[5] E. A. Ruh and J. Vilms, *The tension field of the Gauss map*, Proc. AMS, 149(1970), 569-573.

[6] H. S. Hu, *Sime-Laplace equation, Sink-Laplace equation and harmonic map*, Manuscripta Math., 40(1982), 205-216.

[7] H. C. Gu, *On the harmonic map from R^{11} to S^{11}*, Crelles, Jour., 346(1984), 101-109.

The Surfaces with Constant Mean Curvature and Harmonic Maps

Wang Hong

(Dept. of Appl. Math., Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract

In this paper, we study the intimate relations between the surfaces of constant mean curvature and the harmonic maps to S^2, H^2 and $S^{11}(+1)$ by using the relations between the surfaces of constant mean curvature in Euclidean space R^3 or Minkowski space R^{21} and Sinh-Laplace as well as Sinh-Gordon equations. We also offer a method for constructing the harmonic maps to S^2, H^2 and $S^{11}(+1)$.

Keywords Sinh-Laplace equation, Sinh-Gordon equation.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.