第17卷第1期　数学研究与评论　Vol. 17 No. 1
1997年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 1997

关于常曲率空间中有限点集的几何不等式*

杨　世　国
(安徽教育学院数学系，合肥230061)

摘　要　本文用代数方法建立了 n 维球面型空间 $S_n(K)$ 和 n 维双曲空间 $H_n(K)$ 中有限点集的点与点两两之间之距离的一类几何不等式，本文还建立了 n 维欧氏空间 E^n 中共球有限点集的一类几何不等式．作为本文结果的应用，简洁地得出[3]中的一个重要结果，并得出 E^n 中有限点集的两个几何不等式．

关键词　欧氏空间，球面空间，双曲空间，距离，体积

分类号　AMS(1991) 51K05/CCL O184

§1　引　言

距离几何是本世纪二十年代末所开创的几何学的一个分支，L. M. Blumenthal 的专著[1]是距离几何之经典．在距离几何中，研究各种空间中的点与点两两之间距离的几何不等式是十分重要和有趣的，然而迄今所研究的这类几何不等式多半是关于 n 维欧氏空间中的有限点集．本文用代数方法建立了 n 维球面型空间和 n 维双曲空间中有限点集的点与点两两之间距离的一类几何不等式，并建立了 n 维欧氏空间中共球有限点集的一类几何不等式．作为本文结果的两个应用，十分简洁地得到[3]中的一个结果和 E^n 中有限点集的两个新的几何不等式．

文中约定 E^n 表示 n 维欧氏空间，$S_n(K)$ 和 $H_n(K)$ 分别表示曲率为 K 的 n 维球面型空间和 n 维双曲空间，$S_{m,R}$ 表示半径为 R 的 m 维球面，并约定 n 维常曲率空间中的有限点集 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$ $(N>n)$ 不包含在该空间的 $n-1$ 维超平面内．

本文获得 n 维非欧空间中有限点集的下述几个几何不等式．

定理1　设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$ 为 n 维球面型空间 $S_n(K)$ $(K>0)$ 中有限点集 $(N>n)$，点 A_i 与 A_j 间的球面距离为 ρ_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,N)$，则对任何一组实数 $m_i>0$ $(i=1,2,\cdots,N)$，有

$$\sum_{1\le i<j\le N} m_i^2 m_j^2 \sin^2\sqrt{K}\rho_{ij} \le \frac{n}{2(n+1)}\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i^2\Big)^2, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2 (&\sin^2\sqrt{K}\rho_{ij}+\sin^2\sqrt{K}\rho_{jt}+\sin^2\sqrt{K}\rho_{ti}\\ &+2\cos\sqrt{K}\rho_{ij}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{jt}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{ti})\\ \le \Big[&\frac{n(n-1)}{6(n+1)^2}+\frac{(N-1)(N-2)}{3N^2}\Big]\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i^2\Big)^3.\end{aligned} \tag{1.2}$$

* 1995年5月27日收到．安徽省教委科研基金资助课题

(1.1)中等号成立当且仅当$(m_i m_j \cos\sqrt{K}\rho_{ij})$的所有非零特征值相等;(1.2)中等号成立当且仅当$(\cos\sqrt{K}\rho_{ij})$的所有非零特征值相等.

特别,若在定理1中令$m_1 = m_2 = \cdots = m_N$,得

推论1　在定理1所设条件下,有

$$\sum_{1\le i<j\le N}\sin^2\sqrt{K}\rho_{ij}\le\frac{nN^2}{2(n+1)}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{1\le i<j<t\le N}\sin^2\sqrt{K}\rho_{ij}+\frac{2}{N-2}\sum_{1\le i<j<t\le N}\cos\sqrt{K}\rho_{ij}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{jt}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{ti}$$
$$\le\frac{n(n-1)N^3}{6(n+1)^2(N-2)}+\frac{N(N-1)}{3}. \tag{1.4}$$

(1.3),(1.4)中等号成立当且仅当$(\cos\sqrt{K}\rho_{ij})$的所有非零特征值相等.

定理2　设$\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$为$n$维双曲空间$H_n(K)$$(K<0)$中的有限点集$(N>n)$,点$A_i$与$A_j$在$H_n(K)$中的距离为$r_{ij}(i,j=1,2,\cdots,N)$,$m_i\ne0(i=1,2,\cdots,N)$为任一组可正可负的实数.则有

$$\sum_{1\le i<j<t\le N}m_i^2m_j^2m_t^2\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ij}\cdot\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{jt}\cdot\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ti}$$
$$\le\frac{(n-1)}{3n\sum_{i=1}^{N}m_i^2}\Big(\sum_{1\le i<j\le N}m_i^2m_j^2\mathrm{sh}^2\sqrt{|K|}r_{ij}\Big)^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j<t\le N}m_i^2m_j^2m_t^2(\mathrm{sh}^2\sqrt{|K|}r_{ij}+\mathrm{sh}^2\sqrt{|K|}r_{jt}+\mathrm{sh}^2\sqrt{|K|}r_{ti}+2), \tag{1.5}$$

等号成立当且仅当$(m_i m_j\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ij})$的所有非零特征值相等.

特别,若在定理2中令$m_1 = m_2 = \cdots = m_N$,得

推论2　在定理2所设之下,有

$$\sum_{1\le i<j<t\le N}\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ij}\cdot\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{jt}\cdot\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ti}$$
$$\le\frac{(n-1)}{3nN}\Big(\sum_{1\le i<j\le N}\mathrm{sh}^2\sqrt{|K|}r_{ij}\Big)^2$$
$$+\frac{1}{2}(N-2)\sum_{1\le i<j\le N}\mathrm{sh}^2\sqrt{|K|}r_{ij}+\frac{1}{6}N(N-1)(N-2), \tag{1.6}$$

等号成立当且仅当$(\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ij})$的所有非零特征值皆相等.

设$\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset E^n(N>n)$,$m_i>0(i=1,2,\cdots,N)$,$\sigma$中任意$k+1$个点$A_{i_0},A_{i_1},\cdots,A_{i_k}$所生成的$k$维单形之$k$维体积为$V_{i_0i_1\cdots i_k}$,它的外接球面半径为$R_{i_0i_1\cdots i_k}$,记

$$N_k=\sum_{1\le i_0<i_1<\cdots<i_k\le N}m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V^2_{i_0i_1\cdots i_k},\quad N_0=\sum_{i=1}^{N}m_i,$$

$$M_k=\sum_{1\le i_0<i_1<\cdots<i_k\le N}(m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V_{i_0i_1\cdots i_k}R_{i_0i_1\cdots i_k})^2.$$

[5]中获得两个重要几何不等式:

$$N_k^2\ge\Big(\frac{k+1}{k}\Big)^3\frac{n-k+1}{n-k}N_{k-1}N_{k+1}\quad(1\le k\le n-1), \tag{1.7}$$

$$N_k^l \geq \frac{[(n-l)!(l!)^3]^k}{[(n-k)!(k!)^3]^l}(n!\cdot N_0)^{l-k}\cdot M_l^k \quad (1 \leq k < l \leq n). \tag{1.8}$$

若 $\sigma \subset S_{n-1,R}$, 最近[6]中获得

$$M_k^{l+1} \geq \frac{\left[k\binom{n+1}{k+1}\right]^{l+1}(l!)^{2(k+1)}}{\left[l\binom{n+1}{l+1}\right]^{k+1}(k!)^{2(l+1)}} M_l^{k+1} \quad (1 \leq k < l \leq n). \tag{1.9}$$

本文获得 E^n 中共球有限点集的下述一个新的不等式

定理3　设 $\sigma = \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} \subset S_{n-1,R} \subset E^n (N > n)$, $m_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, N)$ 为一组可正可负的实数, 则有

$$M_k^2 \geq \frac{(k+2)(n-k+1)}{(k+1)(n-k)} M_{k-1} M_{k+1} (2 \leq k \leq n-1), \tag{1.10}$$

等号成立当且仅当 $(m_i m_j a_{ij}^2)$ 的所有非零特征值相等.

从不等式(1.7)可推得不等式(1.8), 一个颇为有趣的问题是: 能否从本文的不等式(1.10)推得不等式(1.9)呢?

§2　引理与定理的证明

为了证明§1中的几个定理, 先介绍下面几个引理.

引理1　设 $\sigma = \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} \subset S_n(K) (N > n)$, 点 A_i 与 A_j 间的球面距离为 $\rho_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, N)$, 则 N 阶方阵

$$A = (\cos\sqrt{K}\rho_{ij}) \tag{2.1}$$

是秩为 $n+1$ 的半正定矩阵.

证明　由[1]中结论知 A 是半正定的, 由[7]中1.9例知 $\mathrm{rank}(A) = n+1$.

引理2[7]　设 $\sigma = \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} \subset H_n(K) (K < 0, N > n)$, 点 A_i 与 A_j 在 $H_n(K)$ 中的距离为 $r_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, N)$, 则 N 阶方阵

$$B = (\mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ij}) \tag{2.2}$$

的秩为 $n+1$.

引理3　设 $\sigma = \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} \subset S_{n-1,R} \subset E^n (N > n)$, 点 A_i 与 A_j 的欧氏距离为 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, N)$, $m_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, N)$ 为实数, 则 N 阶方阵

$$D = (m_i m_j a_{ij}^2) \tag{2.3}$$

的非零特征值的个数为 $n+1$.

证明　由[2]中引理知方阵 (a_{ij}^2) 的非零特征值仅有 $n+1$ 个, 由于 $m_i \neq 0$, 所以 $(m_i m_j a_{ij}^2)$ 的非零特征值也仅有 $n+1$ 个.

引理4[6]　设 E^n 中 m 维单形 $B_1B_2\cdots B_{m+1} (m \leq n)$ 的 m 维体积为 $V_{(m)}$, 外接球面半径为 $R_{(m)}$, 点 B_i 与 B_j 间的距离为 $b_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, m+1)$, 则

$$\det(b_{ij}^2) = (-1)^m 2^{m+1} (m!)^2 V_{(m)}^2 R_{(m)}^2. \tag{2.4}$$

定理1的证明　由于 $m_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, N)$, 由引理1可知 N 阶方阵 $(m_i m_j \cos\sqrt{K}\rho_{ij})$ 是秩

为 $n+1$ 的半正定矩阵, 设 $\lambda_i>0\,(i=0,1,\cdots,n)$ 为它的 $n+1$ 个非零特征值, σ_k 表示 $\lambda_i\,(i=0,1,\cdots n)$ 的 k 次初等对称多项式. 由矩阵特征值和它的各阶主子式之间的关系可知, σ_k 是矩阵 $(m_i m_j \cos\sqrt{K}\rho_{ij})$ 的所有 k 级主子式之和, 经计算有

$$
\begin{cases}
\sigma_1=\sum\limits_{i=1}^{N} m_i^2,\\
\sigma_2=\sum\limits_{1\le i<j\le N} m_i^2 m_j^2 \sin^2\sqrt{K}\rho_{ij},\\
\sigma_3=\sum\limits_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2 (\sin^2\sqrt{K}\rho_{ij}+\sin^2\sqrt{K}\rho_{jt}+\sin^2\sqrt{K}\rho_{ti}-2)\\
\qquad +2\sum\limits_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2 \cos\sqrt{K}\rho_{ij}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{jt}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{ti}.
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

利用 Maclaurian 不等式[11], 有

$$
\frac{\sigma_2}{\binom{n+1}{2}}\le\left[\frac{\sigma_1}{\binom{n+1}{1}}\right]^2,\tag{2.6}
$$

$$
\frac{\sigma_3}{\binom{n+1}{3}}\le\left[\frac{\sigma_1}{\binom{n+1}{1}}\right]^3.\tag{2.7}
$$

由 (2.5), (2.6) 便得不等式 (1.1), 由 (2.5), (2.7) 得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2 (\sin^2\sqrt{K}\rho_{ij}+\sin^2\sqrt{K}\rho_{jt}+\sin^2\sqrt{K}\rho_{ti}\\
&\qquad +2\cos\sqrt{K}\rho_{ij}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{jt}\cdot\cos\sqrt{K}\rho_{ti})\\
&\le\left[\frac{n(n-1)}{6(n+1)^2}\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i^2\Big)^3+2\sum_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2\right].
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

再利用 Maclaurin 不等式, 有

$$
\sum_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2\le\binom{N}{3}\cdot\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i^2\Big)^3.\tag{2.9}
$$

由 (2.8), (2.9) 两式便得 (1.2) 式. 易推知 (1.1), (1.2) 中等号成立的条件如定理1中所述.

定理2的证明 由于 $m_i\ne 0\,(i=1,2,\cdots,N)$, 由引理2可知矩阵 $M=(m_i m_j \mathrm{ch}\sqrt{|K|}r_{ij})$ 的秩为 $n+1$, 设 $\lambda_i\,(i=0,1,\cdots,n+1)$ 为此矩阵的 $n+1$ 个非零特征值, σ_k 表示 $\lambda_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 的 k 次初等对称多项式, 从而矩阵 M 的特征方程 $\det(M-\lambda I_N)=0$ 的 $n+1$ 个非零根 $\lambda_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 满足方程

$$
\lambda^{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\sigma_k\lambda^{n+1-k}=0.\tag{2.10}
$$

其中 σ_k 等于矩阵 M 的所有 k 阶主子式之和, 经计算得

$$
\begin{cases}
\sigma_1=\sum\limits_{i=1}^{N} m_i^2,\\
\sigma_2=-\sum\limits_{1\le i<j\le N} m_i^2 m_j^2 \mathrm{sh}^2\sqrt{K}\rho_{ij},
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_3 = {} & 2\sum_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2 \operatorname{ch}\sqrt{|K|}\,r_{ij}\cdot \operatorname{ch}\sqrt{|K|}\,r_{jt}\cdot \operatorname{ch}\sqrt{|K|}\,r_{ti} \\
& - \sum_{1\le i<j<t\le N} m_i^2 m_j^2 m_t^2 (\operatorname{sh}^2\sqrt{|K|}\,r_{ij} + \operatorname{sh}^2\sqrt{|K|}\,r_{jt} + \operatorname{sh}\sqrt{|K|}\,r_{ti} + 2).
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

对方程(2.10)利用 Newton 定理[10], 得

$$
\left[\frac{\sigma_2}{\binom{n+1}{2}}\right]^2 \ge \frac{\sigma_1}{\binom{n+1}{1}}\cdot\frac{\sigma_3}{\binom{n+1}{3}}. \tag{2.12}
$$

由(2.11), (2.12)便得所要证明的不等式(1.5), 易知(1.5)中等号成立当且仅当矩阵$(m_im_j\operatorname{ch}\sqrt{|K|}\,r_{ij})$的所有非零特征值相等.

定理3的证明　由引理3知矩阵$D=(m_im_ja_{ij}^2)$共有$n+1$个非零特征值$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 以$\sigma_k$表示$\lambda_i(i=0,1,\cdots,n)$的$k$次初等对称多项式, 则有

$$
\sigma_{k+1} = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{k+1}} D_i^{(k+1)} \quad (k=0,1,\cdots,n),
$$

其中$D_i^{(k+1)}\left[i=1,2,\cdots,\binom{N}{k+1}\right]$为矩阵$D$的所有$k+1$阶主子式. 由引理4, 有

$$
\sigma_{k+1} = (-1)^k 2^{k+1}(k!)^2 M_k \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{2.13}
$$

矩阵D的特征方程$\det(D-\lambda I_N)=0$的$n+1$个非零根$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$满足方程

$$
\lambda^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\sigma_k\lambda^{n+1-k} = 0. \tag{2.14}
$$

对方程(2.14)应用 Newton 定理[10]:

$$
\left[\frac{\sigma_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}\right]^2 \ge \frac{\sigma_k}{\binom{n+1}{k}}\cdot\frac{\sigma_{k+2}}{\binom{n+1}{k+2}} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{2.15}
$$

由(2.13), (2.15)便得不等式(1.10), 易知(1.10)中等号当且仅当$(m_im_ja_{ij}^2)$的所有非零特征值相等时成立.

§3　定理的应用

最后介绍§1中定理1与定理3的两个应用.

应用定理1可简洁地得到[3]中的一个重要结果.

定理4　设E^n中n维单形Σ_A的二面角为$\theta_{ij}(1\le i<j\le n+1)$, $m_i(i=1,2,\cdots,n+1)$为一组正数, 则

$$
\sum_{1\le i<j\le n+1} m_i^2 m_j^2 \sin^2\theta_{ij} \le \frac{n-1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2\Big)^2, \tag{3.1}
$$

等号成立当且仅当矩阵

$$
\begin{pmatrix}
m_1^2 & & -m_im_j\cos\theta_{ij} \\
 & \ddots & \\
-m_im_j\cos\theta_{ij} & & m_{n+1}^2
\end{pmatrix}
$$

的所有非零特征值相等

证明　设单形Σ_A的内切球面$S_{n-1,r}$与Σ_A的第i个侧面f_i相切于点A_i', Σ_A的两侧面f_i与f_j所成内二面角为θ_{ij}, A_i'与A_j'的球面距离为ρ_{ij}, 则

$$\sqrt{K}\rho_{ij}=\frac{1}{r}\rho_{ij}=\pi-\theta_{ij}\quad(1\le i<j\le n+1). \tag{3.2}$$

对球面$S_{n-1,r}$上的$n+1$个点$A_i'(i=1,2,\cdots,n+1)$, 应用定理1, 有

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} m_i^2m_j^2\sin^2\sqrt{K}\rho_{ij}\le\frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}m_i^2\right)^2. \tag{3.3}$$

由(3.2), (3.3)两式便得(3.1)式, (3.1)中等号成立的条件是显然的

不等式(3.1)比[4]中关于单形顶点角不等式

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n+1}m_j^2\right)\sin^2\alpha_i\le\frac{1}{n^n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}m_i^2\right)^n \tag{3.4}$$

更强, 由它可导出单形的许多重要不等式

利用定理3中的不等式(1.10)以及不等式(1.9), 立刻可得关于E^n中有限点集的下面两个新的几何不等式

定理5　设点集$\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset E^n(N>n+1)$, 则有

$$M_k^2\ge\frac{(k+2)(n-k+2)}{(k+1)(n-k+1)}M_{k-1}M_{k+1}\quad(2\le k\le n-1), \tag{3.5}$$

$$M_k^{l+1}\ge\frac{\left[k\binom{n+2}{k+1}\right]^{l+1}(l!)^{2(k+1)}}{\left[l\binom{n+2}{l+1}\right]^{k+1}(k!)^{2(l+1)}}M_l^{k+1}\quad(1\le k<l\le n). \tag{3.6}$$

证明　对自然数$k<n-1$, 不等式(1.10)和(1.9)成立与球面$S_{n-1,R}$的半径R无关, 因此当球$S_{n-1,R}$的半径R趋于无穷大时, 此时不等式(1.10)和(1.9)仍成立, 现将E^n视为半径为无穷大的n维球面$S_{n,\infty}\subset E^{n+1}$, 利用不等式(1.10)和(1.9), 并注意到维数的变化, 便得不等式(3.5)与(3.6).

参　考　文　献

[1] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, 2nd. ed., New York, 1970.

[2] 周家农, 共球诸点相互距离之间的一个不等式, 科学通报, 33: 14(1988), 1045- 1047.

[3] 苏化明, 关于单形的三角不等式, 数学研究与评论, 13: 4(1993), 599- 604.

[4] 张垚, 关于垂足单形的一个猜想, 系统科学与数学, 12: 4(1992), 371- 375.

[5] 张景中、杨路, 关于质点组的一类几何不等式, 中国科学技术大学学报, 11: 2(1981), 1- 8.

[6] 苏化明, 共球有限点集的一类几何不等式, 数学年刊, 15A: 1(1994), 46- 49.

[7] 杨路、张景中, 抽象距离空间的秩的概念, 中国科学技术大学学报, 10: 4(1980), 52- 65.

[8] 张小萍、王龙(译), 解析不等式, 科学出版社, 1987, 126.

[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 2nd. et., 1952.