第17卷第1期　　　　　　　　　　数 学 研 究 与 评 论　　　　　　　　　　Vol. 17 No. 1
1997年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1997

关于一个组合常数的注记*

高维东　　杨义先
(北京邮电大学信息系, 北京 100088)

摘　要　本文证明了下面定理. 设 G 是一个有限Abel群, e 为 G 的元之最大阶, 则对任一由 G 的元构成 $|G|+e-1$ 项序列都可找到其中 e 项和为0.

关键词　Abel群, 序列, 元的阶.

分类号　AMS(1991) 20D60/CCL O.152.1

设 G 是一个有限Abel群, $e=e(G)$ 是 G 的元之最大阶, 用 $r_e(G)$ 表满足下面条件的最小正整数 r: 任一由 G 的元构成的 r 项序列中都存在某 e 项和为0. 由Erdös-Ginzburg-Ziv定理([1])知, 当 G 为循环群时, $r_e(G)=2e-1$. 对 $G=\overset{k}{\oplus}Z_n$, Harboth([4]) 证得

$$r_n(G)\le(n-1)n^k+1.$$

在这篇短的注记中, 将指出[2-3]中的方法可以用来在很大程度上改进Harboth的估计. 实际上可证明

定理　设 G 是一有限Abel群, $e=e(G)$ 则

$$r_e(G)\le|G|+e-1.$$

引理[2-3]　设 G 是一有限Abel群, S 是由 G 的元构成的 $|G|$ 项序列. 假设 S 最多有 h 项相等, 则存在 S 的不超过 h 项(至少一项) 和为0.

定理的证明　考虑任一由 G 的元构成的 $|G|+e-1$ 项序列 T, 设 T 中最多 l 项相等, 易知不妨设

$$T=(a_1,\cdots,a_{|G|+e-1-l},\underbrace{0,\cdots,0}_{i}),$$

其中诸 $a_i\ne0$, $i=1,\cdots,|G|+e-1-l$.

如果 $l\ge e$ 显见此时本定理为真.

下设 $l<e$. 将引理应用于序列 $(a_1\cdots,a_{|G|+e-1-l})$ 可得其一串两两不相交的子列 $T_1,\cdots,T_u$ 使得对每一 i, $1\le|T_i|\le h$ 及 T_i 的各项之和为0 $(1\le i\le u, u\ge1)$, 并且

$$|T|-\sum_{i=1}^{u}|T_i|\le|G|-1,$$

于是 $\sum_{i=1}^{u}|T_i|\ge e-h$. 取 v, $1\le v\le u$, 为满足 $\sum_{i=1}^{t}|T_i|\ge e-h$ 之最小正整数 t, 将 $T_1,\cdots,T_v$ 的项放在一起并适当排成 T 的一个子列, 记为 W, 则 W 的各项和为0, 且

* 1994年9月23日收到. 国家杰出青年基金和邮电部中青年基金资助.

$$e - h \le |W| \le (\sum_{i=1}^{v-1} |T_i|) + |T_v| < e - h + h = e.$$

因此可以取 $e - |W| (\le h)$ **项** 0, **再添上** W **的所有项, 得** T **的** e **项和为** 0. **证毕**

注 当 $G = \overset{k}{\oplus} Z_n$ **时, 由本之定理,** $r_n(G) \le n^k + n - 1$, **这一结果显然远优于** Harboth[4] **给出的估计. 我们认为很可能有**

$$r_n(Z_n \oplus Z_n) = 4n - 3.$$

由 Harboth[4] **之结论知,** $n = 2^m 3^w$ **时, 上述等式是对的**

参 考 文 献

[1] P. Erdös, A. Ginzburg and A. Ziv, *A theorem in the additive numder theory*, Bull Res Council Israel, 10F (1961), 41-43.

[2] Gao Weidong, *Addition theorems on finite abelian groups*, J. Number Theory, 53(1995), 241-246.

[3] Gao Weidong, A combinatorial problem for finite abelian groups J. Number Theory, 58(1996), 100-103.

[4] H. Harboth, *Ein extremal problem fur gitterpunkte*, J. Reine Angew Math, 262/263(1973), 356-360.

Note on a Combinatorial Constant

Gao Weidong Yang Yixian

(Dept. of Infor., Beijing University of Posts & Tale., 100088)

Abstract

The following theorem is proved. Let G be a finite Abelian group, e the mximal order of an element in G, and $a_1, \cdots, a_{D(G)+e-1}$ a sequence of $D(G) + e - 1$ elements in G. Then, 0 can be written in the form $0 = a_{i_1} + \cdots + a_{i_e}$, with $1 \le i_1 < \cdots < i_e \le D(G) + e - 1$.

Keywords abelian group, sequence, order of element