第17卷第1期　　　数 学 研 究 与 评 论　　　Vol. 17 No. 1
1997年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1997

正随机向量的矩*

谢 汉 生
(加拿大曼尼托巴大学统计系)

摘　要　本文给出一个计算正随机向量矩的统一的方法, 并对一些特殊的重要的分布类具体给出矩的表达式

关键词　随机向量, 混合矩, γ分布, β分布, Weibull 分布, Dirichlet 分布, 成份数据, 可靠性

分类号　AMS(1991) 62E10/CCL O212.2

§1　引　言

在可靠性统计、成分数据统计分析中经常会遇到各类正的随机向量, 计算这些随机向量的矩对于了解这些随机向量的性质是有意义的. 这些分布中一些特殊的分布如 χ, β, Weibull 分布等是在可靠性统计中经常见到的, 然而当边缘分布是这一类分布时, 向量之间相互关系如何呢?相关性如何呢?就涉及到二阶矩的计算, 本文将给出一些有意义的例来说明这一点. 在成分数据分析中, 成分是非负的, 成分之间的相关性是明显的, 然而有些分布类矩的计算也不是容易的, 有的至今还没有明确的表达式[1].

为了方便, 对文中的记号先作一些说明. 用小写字母表示变量、常量或向量, 其意义或维数由上下文自然确定; 当 x 表示向量时, $\underset{n\times 1}{x}$ 表示 n 维向量, 它的分量用足标表示, 即 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, x' 表示 x 的转置; 当 $\underset{n\times 1}{y}$ 是向量时, dy 表示相应的微分向量, $\int f(y)dy$ 表示多重积分 $\int\cdots\int f(y_1, \cdots, y_n)dy_1\cdots dy_n$, 积分不注明积分域时表示在全空间上积分.

在 §2 给出这个方法, 在 §3 给出各个例, 并简略说明此例的意义, 当意义明显时, 就不再说明.

§2　基 本 公 式

给定正的 n 维随机向量 $y = (y_1, \cdots, y_n)'$, 于是 y 只在 $R_n^+ = \{x: \underset{n\times 1}{x} = (x_1, \cdots, x_n)', x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 上有非0的密度, 用 $p(y)$ 表示 y 的密度函数. 规定 $p(y) = 0$ 时, $\ln p(y) = -\infty$,

* 1994年2月7日收到

$e^{\ln p(y)} = 0$, 于是 y 的密度可以写成

$$p(y) = e^{\ln p(y)} \triangleq e^{f(y)}, \quad y > 0,$$

$y > 0$ 表示 y 的每个分量 y_i 都是正的, 即 $y \in R_n^+$; 符号"$\triangleq$"表示"记成", 即用等式右端表示左端, 在上式中, 即 $f(y) = \ln p(y)$.

此时要求 y 的混合矩 $E(\prod_{i=1}^n y_i^{a_i})$, 也即求下述积分

$$\int_{y>0} (\prod_{i=1}^n y_i^{a_i}) e^{f(y)} dy$$

的表达式

为了以下求解更为方便, 考虑形式上似乎更复杂一些的积分, 记 $(a > 0, b > 0)$

$$C(a, b; f) = \int_{y>0} (\prod_{i=1}^n y_i^{a_i b_i - 1}) e^{-f(y)} dy, \tag{1}$$

假定右端的积分是有限的 注意到右端被积函数是非负的, 于是

$$[C(a, b; f)]^{-1} (\prod_{i=1}^n y_i^{a_i b_i - 1}) e^{-f(y)}, \quad y > 0 \tag{2}$$

也是一个密度函数, 它只在 $y > 0$ 上有非 0 值, 因而是正随机向量的联合密度 可以看到(2) 将包含许多常见的分布族

1. $f(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^{b_i}$ 时, 有 $C(a, b; f) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(a_i)}{b_i \lambda_i^{a_i}}$. 记联合密度为 $p(y)$, 于是

$$p(y) = (\prod_{i=1}^n \frac{b_i \lambda_i^{a_i}}{\Gamma(a_i)} y_i^{a_i b_i - 1}) e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^{b_i}}, \quad y > 0. \tag{3}$$

易见当 $b_i = 1, i = 1, 2, \cdots, n$ 时, $p(y)$ 是独立的 γ 分布的乘积; 当 $a_i = 1, i = 1, 2, \cdots, n$ 时, $p(y)$ 是独立的 Weibull 分布的乘积

2. $f(y) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1) \ln(1 - y_i^{b_i})$, $\lambda_i > 0$, $0 < y_i < 1$, $i = 1, \cdots, n$, 此时联合密度为

$$p(y) = \prod_{i=1}^n \frac{b_i \Gamma(a_i + \lambda_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(\lambda_i)} y_i^{a_i b_i - 1} (1 - y_i^{b_i})^{\lambda_i - 1}, \quad 0 < y_i < 1, i = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

当 $b_1 = \cdots = b_n = 1$ 时, 它就是独立的 β 分布的乘积

3. 若 $f(y)$ 是 $y_1, \cdots, y_n$ 的齐 s 次函数, f 中可以带参数, 若 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)'$ 的密度为

$$p(\omega) = [C(a, b; f)]^{-1} (\prod_{i=1}^n \omega_i^{a_i b_i - 1}) e^{-f(\omega)}, \quad \omega > 0, \tag{5}$$

则令 $t = \sum_{i=1}^n \omega_i$, $x_i = \omega_i / t$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 后, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 就是成份向量, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, t 称为总量 此时 t 与 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的联合分布为

$$[C(a, b; f)]^{-1} (\prod_{i=1}^n x_i^{a_i b_i - 1}) t^{\alpha - 1} e^{-t^s f(x)}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n a_i b_i, t > 0, x > 0, x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i,$$

于是成分 x 的分布(也就是 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的联合分布), 可以求得其密度为

$$[C(a, b; f)]^{-1} \frac{\Gamma(\alpha/s)}{s[f(x)]^{\alpha/s}} \prod_{i=1}^n x_i^{a_i b_i - 1}, \quad x > 0, x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \tag{6}$$

这是很广泛的一类成份分布[1,2].

这就说明了形如(1)的积分和(2)相应的密度是有丰富的内涵的. 现在引出一个基本的公式.

基本公式　若随机向量 y 的联合密度是(2)式的 $p(y)$, 则有

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{k_i}\right) = C(a + D^{-1}(b)k, b; f)/C(a, b; f) = C(a, b + D^{-1}(a)k; f)/C(a, b; f), \quad (7)$$

其中 $k = (k_1, \cdots, k_n)'$, $D^{-1}(a) = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$, $D^{-1}(b) = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n^{-1} \end{pmatrix}$. (7)式的证明是明显的, 只需将 $E\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{k_i}\right)$ 用积分表示就可得到. 从(7)式明显看到, 使用公式的方便之处在于如何求得 $C(a, b; f)$, 也就是要求(1)的积分表示式, 在下一节我们将使用[3]中提供的方法来求出 $C(a, b; f)$. 有些场合 $C(a, b; f)$ 是已知的, 例如对分量独立时, 各分量的边缘分布已知, 则相应的 $C(a, b; f)$ 就立即可以得到.

§3　例

以下用一些例来说明基本公式的不同用法.

例 1　利用已知公式求 $C(a, b; f)$, 再用基本公式求混合矩.

由[3]的第九章已知下列公式:

$$\int_{\substack{u_i > 0 \\ i = 1, 2, \cdots, m}} f\left(\sum_{i=1}^{m} u_i\right) \prod_{i=1}^{m} u_i^{\Gamma_i - 1} du_i = \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(r_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{m} r_i\right)} \int_0^{\infty} y^{\sum_{i=1}^{m} r_i - 1} f(y)\, dy, \quad (8)$$

于是只要上式右端的积分可以求出, 对于一类正随机向量的混合矩就可以用基本公式得到.

若正随机向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)'$ 的联合密度有如下的形式:

$$[C(a, b; f)]^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n} \omega_i^{a_i b_i - 1}\right) e^{-\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i^{b_i}\right)^s}, \quad (9)$$

此时 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 彼此并不独立, 此密度相应的常数 $C(a, b; f)$ 可以用(8)式求得(只须令 $u_i = \omega_i^{b_i}$, $i = 1, \cdots, n$), 得到:

$$C(a, b; f) = \frac{\Gamma(A/s)}{s\Gamma(A)} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(a_i)}{b_i}, \quad A = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

从基本公式得到 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 的混合矩为

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} \omega_i^{k_i}\right) = C(a + D^{-1}(b)k, b; f)/C(a, b; f) = \frac{\Gamma((A + K)/s)\Gamma(A)}{\Gamma(A/s)\Gamma(A + K)} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(a_i + \frac{k_i}{b_i}\right)}{\Gamma(a_i)},$$

其中 $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $K = \sum_{i=1}^{n} k_i/b_i$.

这一结果有一些重要的特例和推论, 列举于下:

1.　当 b_i 均相等, 并都为 1 时, 只要 s 不为 1, $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是彼此不相互独立的. 然而它们相

应的成分向量 $x_1, \cdots, x_n$ 由(6) 式可知为Dirichlet 分布, 这就表明[1] 中猜想的Dirichlet 分布相应的基向量 ω 的分量往往是独立的结论并不正确, 选择不同的 s 可以使得 ω_i 之间相关性有正有负, 这可以从[4] 中看到

2　这一结论还可以推广到更复杂的分布, 若 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 的联合密布为

$$[C(a, b; f)]^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n}\omega_i^{a_ib_i-1}\right)e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\omega_i^{b_i}\right)^s}, \omega_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则有

$$\begin{cases} E\omega_i^{k_i} = \dfrac{\Gamma\left(a_i + \dfrac{k_i}{b_i}\right)\Gamma\left(\dfrac{A}{s} + \dfrac{k_i}{sb_i}\right)\Gamma(A)}{\lambda_i^{k_i/b_i}\Gamma(a_i)\Gamma(A/s)\Gamma\left(A + \dfrac{k_i}{b_i}\right)}, \\ E\omega_i^{k_i}\omega_j^{k_j} = \dfrac{\Gamma\left(a_i + \dfrac{k_i}{b_i}\right)\Gamma\left(a_j + \dfrac{k_j}{b_j}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{s}\left(A + \dfrac{k_i}{b_i} + \dfrac{k_j}{b_j}\right)\right)\Gamma(A)}{\lambda_i^{k_i/b_i}\lambda_j^{k_j/b_j}\Gamma(a_i)\Gamma(a_j)\Gamma(A/s)\Gamma\left(A + \dfrac{k_i}{b_i} + \dfrac{k_j}{b_j}\right)}, \\ \qquad i \neq j, \ i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

因为 $C(a, b; f)^{-1} = \dfrac{s\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\lambda_i^{a_i}\right)\Gamma(A)}{\Gamma(A/s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(a_i)}, A = \sum_{i=1}^{n}a_i$ 的计算方法和本例相同, 所以略去了.

例 2　利用独立性求出 $C(a, b; f)$, 再用基本公式导出不独立的相应的成分向量的混合矩

很明显, 当 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是相互独立的正随机向量时, $C(a, b; f)$ 是可以直接写出的, 对 ω 作一变换, 可得不独立的分量相应的正随机向量, 再用一次基本公式就可以求出新随机向量的混合矩　下面用Beta 分布导出的Connor-Mosimann[1] 分布为例

假定 $y_1, \cdots, y_n$ 相互独立, 各自遵从 β 分布 $\beta(a_i, b_i)$, $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 于是 $y_1, \cdots, y_n$ 的联合密度为

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta(a_i, b_i)}y_i^{a_i-1}(1 - y_i)^{b_i-1}, \ 0 < y_i < 1, a_i > 0, b_i > 0, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

作随机变量变换: $x_1 = y_1, x_2 = y_2(1 - y_1), \cdots, x_i = y_i\prod_{\alpha=1}^{i-1}(1 - y_\alpha), \cdots, x_n = y_n\prod_{\alpha=1}^{n-1}(1 - y_\alpha)$, 再令 $x_{n+1} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha$, 则有

$$x_{n+1} = \prod_{\alpha=1}^{n}(1 - y_\alpha), \ \sum_{\alpha=1}^{n+1}x_\alpha = 1, \ x_\alpha > 0, \alpha = 1, \cdots, n, n + 1,$$

于是 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 是一成分向量, 并且 $x_1, \cdots, x_n$ 的联合密度就是Connor-Mosimann 分布, 即为

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^{a_i-1}}{\beta(a_i, b_i)}\right)x_{n+1}^{b_n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \sum_{\alpha=1}^{i}x_\alpha\right)^{b_i-(a_{i+1}+b_{i+1})}.$$

这只需计算雅可比行列式就能得到　现在成分向量 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 是不独立的, 注意到此时欲求 x_i 的混合矩 $E\left(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{k_i}\right)$, 就是求积分

$$\int_{\substack{x_i > 0,\, i=1,2,\cdots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i < 1,\, x_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i+k_i-1}\right) x_{n+1}^{b_n+k_{n+1}-1} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{i} x_\alpha\right)^{b_i-(a_{i+1}+b_{i+1})} dx_1 \cdots dx_n.$$

如果令

$$a_i^* = a_i + k_i,\quad b_i^* = b_i + \sum_{\alpha=i+1}^{n+1} k_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

立即可知上述积分值为$\prod_{i=1}^{n} \beta(a_i^*, b_i^*)$. 由基本公式得

$$E\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i^{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta(a_i + k_i, b_i + \sum_{\alpha=i+1}^{n+1} k_i)}{\beta(a_i, b_i)}.$$

这样就求出了成分向量 x_i 的混合矩

以上这两个例有相当的代表性, 这两例所用的方法不难用于其他的分布可求得相应的结果

参 考 文 献

[1] J. 艾奇逊著(周蒂等译) (1989中译本), 成分数据的统计分析, 中国地质大学出版社

[2] 张尧庭, 成分数据的分布(技术报告), 1993.

[3] 张尧庭, 方开泰, 多元统计分析引论, 科学出版社, 1982

[4] 张尧庭, 成分分布的几个问题(技术报告), 1993.

The Moments of Positive Random Vector

Xie Hansheng

(Dept. of Statistics, Univ. of Manitoba, R3T 2N2, Canada)

Abstract

In this paper, a unified method is proposed for calculating the moments of positive random vector, and some examples are given.

Keywords random vector, cross moments, γ distribution, β distribution, Weibull distribution, dirichlet distribution, compositional data, reliability.