第17卷第1期 数学研究与评论 Vol.17 No.1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

Banach 压缩映象原理与空间完备性*

向淑文 向淑方
(贵州师范大学数学系, 贵阳550001) (西安交通大学数学系, 西安710049)

摘 要 本文进一步揭示了Banach 压缩映象原理与完备性的关系, 指出: 一般地, Banach 压缩映象原理等价于道路完备性, 在一定条件下才等价于完备性, 进一步给出了这一等价性成立的充要条件.

关键词 Banach 压缩原理, 完备性, 道路完备性
分类号 AMS(1991) 47H10, 54H25/CCL O177.91

1974年 Ekeland[1]所提出的 Ekeland 变分原理与1976年 Caristi[2]所提出的 Caristi 不动点定理从形式上看并无多大关系, 但它们彼此等价. 进一步的研究指出它们都等价于度量空间的完备性(参见[3], [4], [5], [6]).

1983年Borwein[7]中进一步指出: 具有Lipschitz 连通性的空间, Banach 压缩映象原理与空间的完备性等价, 同时Borwein[7]用一反例指出在一般度量空间这一结论并不成立. 于是, 如下问题仍未解决: (1) 在一般度量空间Banach 压缩映象原理与完备性究竟有何关系? (2) Banach 压缩映象原理与空间完备性等价的条件是什么?

本文对上述问题作了进一步研究, 指出: i)Banach 压缩映象原理成立只能保证道路完备性. ii) 压缩映象原理与完备性等价的条件是道路完备性与完备性等价.

定义1 设(X, d)为度量空间, 称连续映象g: $(0, 1]\to X$ 为X 上一半开道路, 若对$\forall \epsilon> 0$, $\exists \delta> 0$, 使当$0< t', t''< \delta$时, 有$d(g(t'), g(t''))< \epsilon$(即当 $t\to 0$时, $g(t)$极限存在).

定义2 设(X, d)为度量空间, 称X 为道路完备, 若X 上每一半开道路g, 当 $s\to 0$时, $g(s)$收敛到X 中一点.

注1 易证若X 完备, 则X 道路完备.

注2 一般度量空间, 即使是道路连通的, 道路完备性一般也不一定等价于完备性, 下例即可说明这一点.

例1 平面R^2的子空间Y 定义如下:

$$Y= \{(x, y)\in R^2 \mid y= \sin\frac{1}{x}, x\in(0, 1]\}.$$

易知Y 道路完备, 但不是完备的.

引理1[8] 设(X, d)为一度量空间, $T: X\to X$ 连续, 且满足

1) 对每一$x\in X$, $T^n(x)\to x^*$ (x^*为T 的不动点);

---

* 1994年3月29日收到. 1996年4月16日收到修改稿. 贵州省自然科学基金资助课题.

2) 在 x^* 的某一邻域内 $T^n(x)\to x^*$ 是一致的,

则在 X 上存在等价度量 d^* 使得 T 关于 d^* 是 X 上的Banach 压缩映象

定理1 设 X 为度量空间, 若对 X 的任意等价度量 d, X 上的Banach 压缩映象有不动点, 即Banach 压缩映象原理成立, 则 X 为道路完备.

证明 设 $\overline{X}$ 为 X 之等距完备化空间, 任取 X 上一半开道路 $g: (0,1]\to X$, 当 $s\to 0$时, $g(s)$ 在 $\overline{X}$ 中收敛, 设 $g(s)\to \overline{x}\in\overline{X}$, 记 $g(0)=\overline{x}$.

由于当 $s\to 0$时, $g(s)\to\overline{x}=g(0)$, 于是对任给一列$\{\epsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $1=\epsilon_0>\epsilon_1>\ldots>\epsilon_k>\ldots$ 且 $\epsilon_k\to 0$(当 $k\to\infty$时), 存在$\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, 满足 $\delta_{k+1}<\delta_k$, 使当$0\le t', t''\le\delta_k$ 时, 有

$$d(g(t'), g(t''))<\epsilon_k. \tag{1}$$

记 $\overline{d}(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, 作 $h: X\to R$, $T: X\cup\{\overline{x}\}\to X\cup\{\overline{x}\}$如下:

$$h(x)=\frac{\delta_{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{\overline{d}(x,\overline{x})-\epsilon_{k-1}}{\epsilon_k-\epsilon_{k-1}}+\frac{\delta_k}{2^k}\cdot\frac{\epsilon_k-\overline{d}(x,\overline{x})}{\epsilon_k-\epsilon_{k-1}},\ \text{当}\ \epsilon_k<\overline{d}(x,\overline{x})\le\epsilon_{k-1},\ k=1,2,\cdots.$$

$$T(x)=g(h(x)),\ \forall x\in X.$$

下验证 $T: X\cup\{\overline{x}\}\to X\cup\{\overline{x}\}$满足引理1全部条件. 由 T 的定义, 易验证 $T: X\to X$ 连续且 $T\overline{x}=\overline{x}$.

另外, 对任给的 $x\in X$, 由

$$|h(x)-0|=\left|\frac{\delta_{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{\overline{d}(x,\overline{x})-\epsilon_{k-1}}{\epsilon_k-\epsilon_{k-1}}+\frac{\epsilon_k}{2^k}\cdot\frac{\epsilon_k-\overline{d}(x,\overline{x})}{\epsilon_k-\epsilon_{k-1}}\right|\le\frac{\delta_{k+1}}{2^{k+1}}+\frac{\delta_k}{2^k}<\delta_k,$$

于是由(1)式, 得

$$d(Tx,\overline{x})=d(g(h(x)),g(0))<\epsilon_k.$$

另由 $\overline{d}(x,y)\le d(x,y)$, 不妨设 $\epsilon_{k'+1}<\overline{d}(Tx,\overline{x})\le\epsilon_{k'}$, 其中 $k'\le k$, 因此

$$|h(Tx)-0|=\left|\frac{\delta_{k'+2}}{2^{k'+2}}\cdot\frac{\overline{d}(Tx,\overline{x})-\epsilon_{k'}}{\epsilon_{k'+1}-\epsilon_{k'}}+\frac{\epsilon_{k'+1}}{2^{k'+1}}\cdot\frac{\epsilon_{k'+1}-\overline{d}(Tx,\overline{x})}{\epsilon_{k'+1}-\epsilon_{k'}}\right|\le\frac{\delta_{k'+2}}{2^{k'+2}}+\frac{\delta_{k'+1}}{2^{k'+1}}<\delta_{k'+1}\le\delta_{k+1}$$

再由(1)式, 得 $d(T^2x,\overline{x})=d(g(h(Tx)),g(0))<\epsilon_{k+1}$. 一直下去, 可证明

$$d(T^nx,\overline{x})<\epsilon_{k+(n-1)}\le\epsilon_n. \tag{2}$$

由(2)式, 当 $n\to\infty$时, T^nx 一致收敛到 $\overline{x}$, 从而引理1之全部条件满足

由引理1, 对于 $T: X\cup\{\overline{x}\}\to X\cup\{\overline{x}\}$, 存在一等价度量 d^*, 使得 T 关于 d^* 为Banach 压缩映象, 由 $T: X\to X$ 及定理1之已知条件, T 在 X 上有不动点, 因此 $\overline{x}\in X$, 故 X 道路完备, 定理1证毕

由定理1, Banach 压缩映象原理成立虽不一定能保证完备性, 却能保证道路完备性

定理2 设(X,d)为道路连通的度量空间, 若 X 道路完备, 则Banach 压缩映象在 X 上必有不动点

证明 设 $T: X\to X$ 为压缩映象, 任取 $x_0\in X$, 可得点列$\{T^nx_0\}$, 易知$\{T^nx^0\}$为Cauchy 列, 再由 X 之道路连通性, 对每一 k 有道路 g_k 连接 T_kx_0与 $T_{k+1}x_0$, 作映象 $g: (0,1]\to X$ 如下:

$$g(s)=g_k(2_{k+1}s-1),\ \text{当}\frac{1}{2^{k+1}}<s\le\frac{1}{2^k},\ k=0,1,2,\cdots.$$

由$\{T^nx_0\}$为柯西列及 $g(s)$之作法可证明 g 为一半开道路 于是由道路完备性, 当 $s\to 0$时, 必有 $g(s)\to x^*\in X$, 不难证明 x^* 即为 T 之不动点 定理证毕

定理2可视为Banach 压缩映象原理的推广, 这一结果将完备性的要求削弱为道路完备.

综合定理1与定理2, 可得如下结果

定理3　设(X, d)为道路连通的度量空间, 则下列结论等价:

i)　X 道路完备.

ii)　对任一等价度量 d, X 上Banach 压缩映象有唯一不动点, 即Banach 压缩原理成立.

定理3揭示了Banach 压缩映象原理与完备性的关系, 即: 一般地, Banach 压缩原理等价于道路完备性, 而不一定等价于完备性.

定理4　设X 为道路连通度量空间, 则Banach 压缩原理与完备性等价的充要条件是道路完备性等价于完备性.

参 考 文 献

[1] I Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., 47(1974), 324- 353.

[2] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., 215(1976), 241- 251.

[3] W. A. Kirk, *Caristi's fixed point theorem and metric convexity*, Colloguium Math., 36(1976), 81 - 86.

[4] F. Sullivan, *A characterization of complete metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 83(1981).

[5] M. Dancs, *A general ordering and fixed point principle in complete metric space*, Acta. Sci. Math., 46(1983), 381- 388.

[6] 史树中, Ekeland 变分原理与Caristi不动点定理的等价性, 数学进展, 2(1987), 203—206.

[7] J. M. Borwein, *Completeness and the contraction principle*, 87(1983), 246- 256.

[8] 张石生, 不动点理论及应用, 重庆出版社, 1984.

Banach Contraction Principle and Completeness

Xiang Shuwen

(Dept. of Math., Guizhou Normal University, Guiyang 550001)

Xiang Shufang

(Dept. of Math., Xi'an Jiaotong University, 710049)

Abstract

In this paper, a new result for completeness and Banach contraction principle is obtained. We prove that Banach contraction principle is equivalent to the path completeness, and we also give a necessary and sufficient condition which grarantees the equivalence of completeness and Banach contraction principle.

Keywords　Banach contraction principle, completeness, patt completeness