第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

关于Meir-Keeler型压缩映射的一点注记*

朱 江
(兰州大学数学系, 兰州730000)

摘 要 本文举例说明了文[1, 2]的结论不成立

关键词 Meir-Keeler型压缩映射, 不动点
分类号 AMS(1991) 47H10/CCL O177.91

B. E. Rhoades等人在文[1]中证明了一个一般的Meir-Keeler型压缩映射的不动点定理, 即[1]中的定理1. 文[1]宣称, 该结果去掉了连续性, 是Meir-Keeler型压缩映射中最一般的不动点定理, 包含了五十多个定理作为特殊情形. 但是我们发现, 此结果不成立. 而原作者在文[2]中又以此为依据证明了新的不动点定理, 因而也是不成立的. 下面以例说明.

首先将[1]中的定理1复述如下:

定理A 设(X, d)是完备的度量空间, S, T是X的自映射且其中之一连续, 又设存在X的一个自映射序列$\{A_i\}$满足:

(i) 对任何$i, A_i: X \to SX \cap TX$或

(i)′ $S, T: X \to \cap_i A_i X$;

(ii) 每一个A_i与S和T是相容的;

(iii) 对任何$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使对任何$x, y \in X$, $\epsilon \le M_{i,j}(x, y) < \epsilon + \delta$可推出$d(A_i x, A_j y) < \epsilon$, 其中$M_{i,j}(x, y) = \max\{d(Sx, Ty), d(Sx, A_i x), d(Ty, A_j y), [d(Sx, A_j y) + d(Ty, A_i x)]/2\}$.

则所有的A_i, S和T有唯一的公共不动点.

注 在原文中, 原作者已声明, 定理A的原条件(iii)不必要, 故省略. 相容映射的定义参见[1].

例1 令$X = [0, 1]$具有通常的Euclide距离. 定义映射A和$S: X \to X$为:

$$Ax = \begin{cases} 1, \text{若 } x = 0; x \in X. \\ \dfrac{x}{2}, \text{若 } x \neq 0. \end{cases}$$

$$Sx = x, \quad x \in X.$$

在定理A中, 令$S = T$, 对任何$i, A_i = A$, 则定理A的条件(i), (ii)显然满足. 对任何$x, y \in X$, 当$x \neq 0, y \neq 0$时,

---

* 1994年3月5日收到

$$M(x,y)=\max\{d(x,y),d(x,Ax),d(y,Ay),[d(x,Ay)+d(y,Ax)]/2\}$$
$$=\max\{|x-y|,\frac{x}{2},\frac{y}{2},[|x-\frac{y}{2}|+|y-\frac{x}{2}|]/2\};$$

当 x,y 中有一个为零时，不妨设 $x\neq 0, y=0$,

$$M(x,y)=\max\{x,x/2,1,[1-x+x/2]/2\}=1;$$

当 $x=y=0$ 时，$M(0,0)=1$.

对任何 $\epsilon>0$，若 $\epsilon<1$，取 $0<\delta<\epsilon$，使 $\epsilon+\delta<1$，则 $\epsilon\leq M(x,y)<\epsilon+\delta$ 可推出 $x\neq 0, y\neq 0$，因此，

$$d(Ax,Ay)=|x-y|/2\leq M(x,y)/2<(\epsilon+\delta)/2<\epsilon$$

若 $\epsilon=1$，则对任何 $\delta>0$，由 $\epsilon\leq M(x,y)<\epsilon+\delta$ 推出 x,y 中至少有一个为零. 设 $x\neq 0, y=0$，有 $d(Ax,A0)=1-\frac{x}{2}<1=\epsilon$，若 $x=y=0$，$d(A0,A0)=0<\epsilon=1$. 即定理A 的条件(iii)满足. 但 A 和 S 显然无公共不动点.

例1说明定理A 不成立. 因此为保证不动点的存在性，Meir-Keeler 型条件中，映射的连续性是必要的.

附加连续性之后，定理A 成立.

参 考 文 献

[1] B. E. Rhoades, Sehie Park and Kwon Bai Moon, *On generalizations of the Meir-Keeler type contraction maps*, J. Math. Appl., 146(1990), 482-494.

[2] B. E. Rhoades, *Fixed point theorems for some families of maps*, Indian J. Pure Appl. Math., 21(1)(1990), 10-20.

[3] 张石生，不动点理论及其应用，重庆出版社，1984.

Note on the Meir-Keeler Type Contraction Maps

Zhu Jiang

(Dept. of Math., Lanzhou Normal University, 730000)

Abstract

In this paper, we give an example to show that the results of [1, 2] do not hold.

Keywords Meir-Keeler type contraction maps, fixed points