第 17 卷第 2 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 17 No. 2
1997 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1997

关于四元数自共轭矩阵乘积迹和特征值的几个定理*

张树青　杨国庆　吕蕴霞

(烟台师范学院数学系, 山东 264025)

摘　要　给出四元数自共轭矩阵乘积迹的几个定理及特征值之界的几个新估计, 在四元数体上改进和推广了文[1- 12]的相应结果

关键词　四元数, 自共轭矩阵, 特征值, 迹

分类号　AMS(1991) 15A15, 15A33/CCL O151.21

1　引言和引理

如文[13]所言, 由于四元数体的非交换性, 使得复数域上矩阵迹的不少性质在四元数体上不成立, 因此四元数矩阵迹的研究要比复矩阵困难得多. 为此, 笔者在文[12- 15]中作了许多四元数矩阵迹性质的研究, 得到若干结果. 本文又给出四元数自共轭矩阵乘积迹的几个定理和特征值之界的几个新估计, 这些结果是文[1- 12]的相应结果在四元数体上的改进和推广.

约定 $GL_n(\Omega)$, $SC_n(\Omega)$, $GU_n(\Omega)$ 分别为四元数体 Ω 上 n 阶非奇异、自共轭、广义酉阵的集合, 当 A $(\in SC_n(\Omega))$ 为半正定(正定)时, 记 $A\geq 0$ $(A>0)$, 对 $A\in\Omega^{n\times n}$, 用 $\mathrm{tr}A$, A^* 表示 A 的迹和 A 的共轭转置阵, 用 $\mathrm{Re\,tr}A$ 表示 $\mathrm{tr}A$ 的实数部分, 若 A 有 n 个实特征值, 则记为 $\lambda_1(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$, 用 $R^{m\times n}$ 表示实数域 R 上 $m\times n$ 矩阵集, 对一组数 $a_t\in R$ $(t=1,2,\cdots,n)$, 若无特殊说明, 以下总设其按大小顺序排列为 $a_{[1]}\geq\cdots\geq a_{[n]}$.

设 $x, y\in R^{1\times n}$, 如果它们的分量满足:

$$\sum_{t=1}^{m}x_{[t]}\leq\sum_{t=1}^{m}y_{[t]},\ m=1,2,\cdots,n-1,\quad \sum_{t=1}^{n}x_{[t]}=\sum_{t=1}^{n}y_{[t]},$$

则称 x 被 y 控制[17], 记作 $x\prec y$.

设 $P=(p_{ts})\in R^{n\times n}$, 若满足:

$$p_{ts}\geq 0,\ \sum_{t=1}^{n}p_{ts}=1,\ s=1,2,\cdots,n;\ \sum_{s=1}^{n}p_{ts}=1,\ t=1,2,\cdots,n, \tag{1.1}$$

则称 P 为 R 上双随机矩阵[18], 记 $P\in\mathbf{P}$.

引理 1[16]　设 $A\in SC_n(\Omega)$, 则存在 $U\in GU_n(\Omega)$, 使 $U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))$, 其中诸 $\lambda_t(A)\in R$ 且 $\mathrm{tr}A=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)$.

引理 2[13]　设 $A, B\in\Omega^{n\times n}$, 则

* 1994 年 6 月 20 日收到. 山东省自然科学基金资助项目.

$$\mathrm{Re\,tr}(AB)=\mathrm{Re\,tr}(BA).$$

引理 3[19] 设 $x, y \in R^{1\times n}$, 则

$$\sum_{t=1}^{n} x_{[t]}y_{[n-t+1]} \le \sum_{t=1}^{n} x_t y_t \le \sum_{t=1}^{n} x_{[t]}y_{[t]}.$$

引理 4[17] 设 $x, y, z \in R^{1\times n}$, 且 $x \prec y$, 则

$$\sum_{t=1}^{n} x_{[t]}z_{[t]} \le \sum_{t=1}^{n} y_{[t]}z_{[t]}, \quad \sum_{t=1}^{n} y_{[n-t+1]}z_{[t]} \le \sum_{t=1}^{n} x_{[n-t+1]}z_{[t]}.$$

引理 5[2] 设 $P \in \mathbf{P}$, 则对任意 $y \in R^{1\times n}$, 有 $yP \prec y$.

引理 6[20] 设 $A > 0, B \in SC_n(\Omega)$, 或者 $A, B \ge 0$, 则 AB 与 BA 相似于同一实对角阵.

引理 7 如果 $A \in \Omega^{n\times n}$ 相似于一个实对角阵, 则 A 是可中心化矩阵, 且该对角阵的主对角线上的元素恰为 A 的全部特征值.

引理 8[21] 设 $A > 0, B > 0$, 则 AB 的特征根全大于零.

引理 9[10] 设 $A \ge 0, B \ge 0$, 则对任何自然数 m, 有

$$\sum_{t=1}^{m} \lambda_t^m(A)\lambda_{n-t+1}^m(B) \le \mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m \le \mathrm{tr}(A^{\frac{m}{2}}B^mA^{\frac{m}{2}}) \le \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^m(A)\lambda_t^m(B).$$

引理 10 设 $A, B \in SC_n(\Omega)$, 则

$$\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}BA = 2\mathrm{Re\,tr}AB.$$

证明 由文[14]知, $\Omega^{n\times n}$ 对内积 $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}A^*B$ $(A, B \in \Omega^{n\times n})$ 作成 Ω 上一个广义酉空间. 故当 $A, B \in SC_n(\Omega)$ 时, 由文[14]中内积的性质 1), 有

$$\mathrm{tr}BA = \mathrm{tr}B^*A = \langle B, A\rangle = \overline{\langle A, B\rangle} = \overline{\mathrm{tr}A^*B} = \overline{\mathrm{tr}AB}.$$

故有 $\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}BA = \mathrm{tr}AB + \overline{\mathrm{tr}AB} = 2\mathrm{Re\,tr}(AB)$. □

2 定理及证明

定理 1 设 $A, B \in SC_n(\Omega)$, 则

(i) $$\sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A)\lambda_{n-t+1}(B) \le \mathrm{Re\,tr}AB \le \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A)\lambda_t(B). \tag{2.1}$$

(ii) 当 $A > 0$, 或 $A, B \ge 0$ 时, 有

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A)\lambda_{n-t+1}(B) \le \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(AB) = \mathrm{Re\,tr}AB \le \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A)\lambda_t(B). \tag{2.2}$$

(iii) 当 $A > 0, B > 0$ 时, 有诸 $\lambda_t(AB) > 0$, 且

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda_t^{-1}(AB) = \mathrm{Re\,tr}(AB)^{-1} \le \sum_{t=1}^{n} [\lambda_t(A)\lambda_t(B)]^{-1}, \tag{2.3}$$

$$n^2\Big[\sum_{t=1}^{n} \lambda_t^{-1}(A)\lambda_t^{-1}(B)\Big]^{-1} \le \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(AB) = \mathrm{Re\,tr}AB \le \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A)\lambda_t(B). \tag{2.4}$$

证明 (i) 由题设及引理 1 知, 有 $U, V \in GU_n(\Omega)$ 使

$$A = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))U^*, \quad B = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1(B), \cdots, \lambda_n(B))V^*,$$

于是有

$$AB = U[\mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))W\,\mathrm{diag}(\lambda_1(B), \cdots, \lambda_n(B))W^*]v^*, \tag{2.5}$$

其中 $W = U^*V = (w_{ts})$. 令 $p_{ts} = w_{ts}\overline{w}_{ts} = |w_{ts}|^2$, $t, s = 1, 2, \cdots, n$, 则由(2.5)和引理 2 有

$$\mathrm{Re\ tr}AB = \mathrm{Re\ tr}[\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))W\,\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))W^*]$$
$$= \mathrm{Re\ tr}[\sum_{t=1}^{n} E_{tt}\lambda_t(A)W\,\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))W^*], \tag{2.6}$$

其中 $E_{tt}=\mathrm{diag}(0,\cdots,\underset{第t个}{0,1,0},\cdots,0)$, $t=1,2,\cdots,n$. 直接计算可得

$$\mathrm{tr}[E_{tt}W\,\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))W^*] = \sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)p_{ts}. \tag{2.7}$$

由(2.6), (2.7)可得

$$\mathrm{Re\ tr}AB = \mathrm{Re}(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)p_{ts}) = \sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)p_{ts}. \tag{2.8}$$

显然 $W\in GU_n(\Omega)$, 由此易知 $P=(p_{ts})\in\mathbf{P}$, 故若令 $x_k=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)p_{ks}$, $k=1,2,\cdots,n$, 则由引理5知

$$(x_1,\cdots,x_n) = (\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))P \prec (\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B)). \tag{2.9}$$

于是由引理3、引理4及(2.9)得

$$\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)\lambda_{n-t+1}(B)\leq\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)x_{[n-t+1]}\leq\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)x_t$$
$$\leq\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)x_{[t]}\leq\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)\lambda_t(B). \tag{2.10}$$

最后由(2.8), (2.10)便得(2.1).

(ii) 由引理6, 引理7知, 有 $P\in GL_n(\Omega)$ 使

$$P^{-1}ABP=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB)),\ 诸\ \lambda_t(AB)\in R.$$

于是由引理2得

$$\mathrm{Re\ tr}AB = \mathrm{Re\ tr}(ABPP^{-1}) = \mathrm{Re\ tr}(P^{-1}ABP) = \sum_{t=1}^{n}\lambda_t(AB). \tag{2.11}$$

由(2.1), (2.11)便得(2.2).

(iii) 当 $A>0, B>0$ 时, 由引理8知, 诸 $\lambda_t(AB)>0$, 同时 $A^{-1}>0, B^{-1}>0$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, 它们的特征值分别为 $\lambda_t^{-1}(A)$, $\lambda_t^{-1}(B)$, $\lambda_t^{-1}(AB)$, $t=1,2,\cdots,n$. 于是由(2.2) 立得(2.3) 式. 注意到诸 $\lambda_t^{-1}(AB)>0$, 由Cauchy不等式可得

$$n^2=[\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{\frac{1}{2}}(AB)\lambda_t^{-\frac{1}{2}}(AB)]^2\leq(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(AB))(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{-1}(AB)),$$
$$n^2(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{-1}(AB))^{-1}\leq\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(AB). \tag{2.12}$$

由(2.12), (2.3)得

$$n^2[\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{-1}(A)\lambda_t^{-1}(B)]^{-1}\leq n^2(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{-1}(AB))^{-1}\leq\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(AB) = \mathrm{Re\ tr}AB. \tag{2.13}$$

最后由(2.13), (2.2)便得(2.4). □

推论1 设 $A>0, B>0$, 则

$$n^2\cdot\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$

$$\le \sum_{t=1}^{n}\lambda_t(AB) = \mathrm{Re}\quad \mathrm{tr}AB \le \min\{\lambda_1(A)\mathrm{tr}B, \lambda_1(B)\mathrm{tr}A\},$$

(2 14)

$$\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1}, \lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$
$$< \lambda_t(AB) < \min\{\lambda_1(A)\mathrm{tr}B, \lambda_1(B)\mathrm{tr}A\},\ t = 1, 2, \cdots, n. \tag{2 15}$$

证明 (2 14) 和(2 15) 这两个不等式的后半部分可由(2 4) 的后半部分直接得到 又由 A^{-1}, B^{-1} 的特征值分别为 $\lambda_n^{-1}(A) \ge \lambda_{n-1}^{-1}(A) \ge \cdots \ge \lambda_1^{-1}(A)\ (> 0)$ 及 $\lambda_n^{-1}(B) \ge \lambda_{n-1}^{-1}(B) \ge \cdots \ge \lambda_1^{-1}(B)\ (> 0)$ 及(2 14) 的后半部分得

$$\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{-1}(A)\lambda_t^{-1}(B) = \sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A^{-1})\lambda_t(B^{-1}) \le \min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1}, \lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}.$$

于是有

$$\left(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{-1}(A)\lambda_t^{-1}(B)\right)^{-1} \ge 1/\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1}, \lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$
$$= \max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1}, \lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}.$$

将上式代入(2 4) 便得(2 14) 的前半部分.

又由(2 15)的后半部分可得

$$\lambda_t^{-1}(AB) = \lambda_t(B^{-1}A^{-1}) < \min\{\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}, \lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1}\},\ \ t = 1, 2, \cdots, n.$$

于是有

$$\lambda_t(AB) > 1/\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1}, \lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$
$$= \max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1}, \lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}. \qquad \square$$

推论 2 设 $A > 0, B > 0$, 则

$$\frac{2}{n}(\lambda_n^2(A) + \lambda_n^2(B))^{-1}\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B) < \sum_{t=1}^{n}\lambda_t(AB) \le \frac{n}{2}(\lambda_1^2(A) + \lambda_1^2(B)), \tag{2 16}$$

$$\frac{2}{n}(\lambda_n^2(A) + \lambda_n^2(B))^{-1}\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B) < \lambda_t(AB) < \frac{n}{2}(\lambda_1^2(A) + \lambda_1^2(B)), \tag{2 17}$$

$t = 1, 2, \cdots, n.$

证明 由几何-算术平均值不等式可得

$$\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A)\lambda_t(B) \le \frac{n}{2}(2\lambda_1(A)\lambda_1(B)) \le \frac{n}{2}(\lambda_1^2(A) + \lambda_1^2(B)), \tag{2 18}$$

$$\sum_{t=1}^{n}[\lambda_t(A)\lambda_t(B)]^{-1} = \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{\lambda_t(A)\lambda_t(B)} \le \frac{n}{2}\,\frac{2}{\lambda_n(A)\lambda_n(B)} \le \frac{n}{2}\,\frac{\lambda_n^2(A) + \lambda_n^2(B)}{\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)}, \tag{*}$$

所以

$$\left[\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{-1}(A)\lambda_1^{-1}(B)\right]^{-1} \ge \frac{2}{n}(\lambda_n^2(A) + \lambda_n^2(B))^{-1}\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B). \tag{2 19}$$

将(2 18), (2 19)代入(2 4)便得(2 16), (2 17)显然成立 $\square$

定理 2 设 $A, B \in SC_n(\Omega), C = A - B$, 则

$$\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^2(A - B) \ge \sum_{t=1}^{n}(\lambda_t(A) - \lambda_t(B))^2. \tag{2 20}$$

证明 显然 $C \in SC_n(\Omega), C^2, A^2, B^2$ 均 ≥ 0, 且 A^2, B^2, C^2 的特征值分别为 $\lambda_1^2(A), \cdots,$

$\lambda_n^2(A)$; $\lambda_1^2(B), \cdots, \lambda_n^2(B)$; $\lambda_1^2(A-B), \cdots, \lambda_n^2(A-B)$. **于是当** $A>0$ **时, 由引理** 10 **及**(2.2)**有**

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(A-B) = \operatorname{tr}(A-B)^2 = \operatorname{tr}(A^2 - AB - BA + B^2) = \operatorname{tr}A^2 - 2\operatorname{Re}\operatorname{tr}AB + \operatorname{tr}B^2$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(A) - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(B)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2. \tag{2.21}$$

当 $A \not> 0$ **时, 因有充分大的实数** a, **使** $aI_n + A > 0$, **其特征值为** $a + \lambda_t(A)$, $t = 1, 2, \cdots, n$. **又** $aI_n + C = aI_n + A - B$, **于是由**(2.21)**有**

$$\sum_{i=1}^{n} (a + \lambda_i(C))^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (a + \lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2.$$

将上式展开, 并利用

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(C) = \operatorname{tr}C = \operatorname{tr}(A-B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_i(B)),$$

将仍得(2.20). □

定理 3　**设** $A>0, B>0$, **则**

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A)\lambda_i(B))^{-1} - (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) - (n-1)c\Big)^{-1}\Big]^{-1}$$

$$< \lambda_s(AB) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) - (n-1)c, \tag{2.22}$$

$s = 1, 2, \cdots, n$, **其中** c **是** $0 < c < \lambda_n(AB)$ **的常数**

证明　**由题设及定理** 1 **之**(ii)**得**

$$\lambda_s(AB) \leq \lambda_1(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(AB)$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) - (n-1)c, \tag{2.23}$$

$s = 1, 2, \cdots, n$. **将**(2.23)**两端取倒数得**(**注意** $\lambda_s(AB) > 0$)

$$\lambda_s^{-1}(AB) > \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) - (n-1)c\Big)^{-1}, s = 1, 2, \cdots, n.$$

于是由(2.3)**式立得**

$$\lambda_s^{-1}(AB) \leq \lambda_n^{-1}(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A)\lambda_i(B))^{-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{-1}(AB)$$

$$< \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(A)\lambda_i(B)]^{-1} - (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) - (n-1)c\Big)^{-1},$$

在上式两端取倒数得

$$\lambda_s(AB) > \Big[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A)\lambda_i(B))^{-1} - (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) - (n-1)c\Big)^{-1}\Big]^{-1}, \tag{2.24}$$

由(2.23), (2.24)**两式便得**(2.22). □

推论 3　**设** $A>0, B>0$, **则**

$$\frac{n}{2}\frac{\lambda_n^2(A)+\lambda_n^2(B)}{\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)}-\frac{n-1}{\frac{n}{2}(\lambda_1^2(A)+\lambda_1^2(B))-(n-1)c}$$

$$<\lambda_s(AB)<\frac{n}{2}(\lambda_1^2(A)+\lambda_1^2(B))-(n-1)c,s=1,2,\cdots,n, \tag{2.25}$$

其中 c 是 $0<c<\lambda_n(AB)$ 的常数.

证明 由(2.22)及(2.18)及(*)式便得(2.24). □

定理4 设 $A\geq 0,B\geq 0$, 则对任何自然数 m, 有

$$\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^m(A)\lambda_{n-t+1}^m(B)\leq \mathrm{Re\ tr}(AB)^m\leq \mathrm{Re\ tr}A^mB^m\leq \sum_{t=1}^{n}\lambda_t^m(A)\lambda_t^m(B). \tag{2.26}$$

如果 $A>0,B>0$, 还有

$$\left[\sum_{t=1}^{n}(\lambda_t(A)\lambda_t(B))^{-m}-(n-1)\left(\sum_{t=1}^{n}(\lambda_t(A)\lambda_t(B))^m-(n-1)c\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$<\lambda_s^m(AB)<\sum_{t=1}^{n}(\lambda_t(A)\lambda_t(B))^m-(n-1)c,s=1,2,\cdots,n, \tag{2.27}$$

其中 c 是满足 $0<c<\lambda_n^m(AB)$ 的常数.

证明 (2.26)式可由引理9及引理2直接得到. 又当 $A>0,B>0$ 时, 由定理1中(ii)的证明知, 有 $P\in GL_n(\Omega)$ 使

$$P^{-1}ABP=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB)), \text{诸 } \lambda_t(AB)>0,$$

从而

$$P^{-1}(AB)^mP=\mathrm{diag}(\lambda_1^m(AB),\cdots,\lambda_n^m(AB)), \text{诸 } \lambda_t^m(AB)>0,$$

故由引理2可得

$$\mathrm{Re\ tr}(AB)^m=\mathrm{Re\ tr}[(AB)^mPP^{-1}]=\mathrm{Re\ tr}P^{-1}(AB)^mP=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^m(AB).$$

将上式代入(2.26)式, 然后仿定理3的证明即可得(2.27)式. □

参 考 文 献

[1] 陈福元, 厄米特阵乘积的迹及其应用, 数学的实践与认识, 3(1993), 65-67.

[2] 刘建洲, 四元数体上的矩阵及其优化理论, 数学学报, 6(1992), 831-838.

[3] 刘建洲, 谢清明, 四元数自共轭矩阵乘积的特征值的不等式, 数学研究与评论, 3(1992), 379-383.

[4] 黄 欣, 关于正定Hermitian矩阵乘积的特征值估计, 苏州大学学报, 1(1990), 24-27.

[5] 杨一新, 半正定Hermite矩阵乘积的特征值估计, 青海师范大学学报(自), 1(1991), 35—37.

[6] 曹重光, 两个四元数自共轭半正定矩阵乘积的特征值估计, 数学研究与评论, 1(1990), 19-22.

[7] 徐德余, 对正定厄米特矩阵乘积的特征值的新估计, 数学的实践与认识, 1(1989), 53—54.

[8] Sha Hyyun, *Estimation of the eigenvalues of AB for A > 0, B > 0*, Linear Algebra and Its Appl., 73(1986), 147-150.

[9] A. J. Hoffman and H. W. Wielandt, *The variation of the spectum of a normal matrix*, Duke Math. J., 20(1953).

[10] 杨忠鹏, 实四元数矩阵的Bushell-Trustrum不等式及其改进, 数学研究与评论, 39(1993), 46-

50.
[11] 席博彦, 关于矩阵迹的Bellman不等式, 新疆大学学报(自), 4(1991), 34- 36.
[12] 张树青、周贵学, Bellman猜想在四元数体上的修正, 烟台师范学院学报(自), 1(1994), 18- 21.
[13] 张树青, 关于四元数矩阵之迹的几个定理, 数学研究与评论, 4(1993), 567- 572.
[14] 张树青、吕蕴霞, 四元数矩阵之迹的几个不等式, 烟台师范学院学报(自), 3(1992), 5- 10.
[15] 张树青, 四元数矩阵之迹的几个定理, 烟台师范学院学报(自), 3(1993), 16- 19.
[16] 谢邦杰, 四元数自共轭矩阵与行列式, 吉林大学自然科学学报, 2(1980), 19- 35.
[17] A. W. Marshall and I Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.
[18] 蒋正新、施国梁, 矩阵理论及其应用, 北京航空学院出版社, 1988, 383.
[19] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Its ed., 2nd, ed. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1934, 1952.
[20] 曹重光, 四元数自共轭矩阵的几个定理, 数学研究与评论, 3(1988), 346- 348.
[21] 谢邦杰, 四元数自共轭矩阵的行列式的展开定理及其应用, 数学学报, 5(1980), 668- 683.

Several Theorems on Trace and Eigenvalues for Quaternion Self-Conjugate Matrices Products

Zhang Shuqing
(Yantai Teachers' College, 264025)

Abstract

In this paper, several theorems and new estimations of trace and eigenvalues for quaternion self-conjugate matrices products are given, thus corropoding results in the papers [1-12] are generalized and improved over quaternion skew-field.

Keywords quaternion skew-field, self-conjugate matrices, eigenvalues, trace.