第 17 卷第 2 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 17 No. 2
1997 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1997

微分算子环的素理想*

王　志　玺
(首都师范大学数学系, 北京 100037)

摘　要　本文利用代数的方法与基本结果, 对钟家庆关于微分算子理想的结构基于 H. Maass 的调和齐式分解所得到的结果, 在复系数情形给出了一个纯代数的简短证明, 在证明中不需要关于微分算子的齐次性假设

关键词　微分算子环, 素理想, 二重零化子条件.

分类号　AMS(1991) 47F05, 47D50/CCL O177.6

在对多复变典型域的调和函数研究中, 华罗庚教授针对一组微分算子具有"公共 Poisson 核"的现象曾提出研究使同一 Poisson 核零化的所有微分算子(在微分算子环中显然构成一左理想)的代数结构 [1]从与 Hilbert 零点定理类比出发讨论了这一问题

设 $T_1, T_2, \cdots, T_m$ 是定义在某一区域 $\mathbf{D}$ 上的 m 个微分算子, Ω 表其公共解的集合. 那么对 $T_1, \cdots, T_m$ 可以联系以下两个微分算子环中的左理想:

1)　$(T_1, \cdots, T_m) = \{\sum_{i=1}^{m} A_i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}) T_i$, 其中 $A_i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ 是 $\mathbf{D}$ 上的任意微分算子$\}$;

2)　$H(T_1, \cdots, T_m) = \{$微分算子 $T \mid Tf = 0$, 任意 $f \in \Omega\}$.

显然, $(T_1, \cdots, T_m) \subseteq H(T_1, \cdots, T_m)$. 如果有等式 $H(T_1, \cdots, T_m) = (T_1, \cdots, T_m)$ 成立, 文[1]称左理想 $(T_1, \cdots, T_m)$ 是素的 为避免与通常的代数的素理想概念相混淆, 以下我们改称"在[1]意义下是素的"为"Z-素的."

如果采用通常的环论术语对上述过程代数化, Z-素性的判定问题将化为一个纯代数的问题 设 A 是有单位元的结合环, M 是一左 A-模, 对 A 的任意左理想 $\mathfrak{A}$, $\mathrm{ann}_M \mathfrak{A} = \{m \in M \mid \mathfrak{A}m = 0\}$ 是 $\mathfrak{A}$ 在 M 中的零化子, 左理想 $\mathrm{ann}_A \mathrm{ann}_M \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的二重零化子. 易见, $\mathfrak{A}$ 是 M 的子集的零化子当且仅当 $\mathfrak{A} = \mathrm{ann}_A \mathrm{ann}_M \mathfrak{A}$ 此时称 $\mathfrak{A}$ 关于 M 满足二重零化子条件, 简记为 M-d.a.c 或 d.a.c

具体地, 取 A 为 $\mathbf{D}$ 上全体线性微分算子所构成的环, M 为 $\mathbf{D}$ 上无穷次可微函数空间 按照通常的微分作用, M 作成左 A-模 若 $\mathfrak{A}$ 为由微分算子 $T_1, \cdots, T_m$ 生成的左理想, 则 $\mathrm{ann}_M \mathfrak{A}$ 为 $T_1, \cdots, T_m$ 的核空间 $\mathfrak{A}$ 的二重零化子 $\mathrm{ann}_A \mathrm{ann}_M \mathfrak{A}$ 对应于前述的左理想 $H(T_1, \cdots, T_m)$, 因此, $\mathfrak{A}$ 是 Z-素的当且仅当 $\mathfrak{A}$ 满足(M-)d.a.c.

通过问题的上述转化可证明

* 1994 年 7 月 25 日收到 北京市自然科学基金与北京教委科学研究与发展研究计划项目资助课题

定理 设 $T_1(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}),\cdots,T_m(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ 是具复的常系数的微分算子, 如果相应的多项式 $T_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,T_m(x_1,\cdots,x_n)$ 生成的理想 $(T_1,\cdots,T_m)$ 是多项式环的根理想(即素理想的交), 那么在常系数微分算子环中理想 $(T_1(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}),\cdots,T_m(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}))$ 是 Z-素的

上述结果是对[1]的定理 3 的复系数形式的改进 因为[1]的讨论基于 H. Maass 的调和齐式分解定理, 所以这里给出了相应形式的分析结果的一个代数证明

先给出一个引理

引理 设 A 是有单位元的交换环, $\mathfrak{A}_i(i\in I)$ 是 A 的理想, M 是任意 A-模 如果对任意 $i\in I$, $\mathfrak{A}_i$ 满足 M-d.a.c., 那么 $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ 满足 M-d.a.c.

证明 对任意 $i\in I$, $\mathrm{ann}_M\mathfrak{A}_i\subseteq\mathrm{ann}_M(\bigcap_{j\in I}\mathfrak{A}_j)$, 从而 $\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M\mathfrak{A}_i\supseteq\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M(\bigcap_{j\in I}\mathfrak{A}_j)$. 又, $\mathfrak{A}_i$ 满足 M-d.a.c., 即 $\mathfrak{A}_i=\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M\mathfrak{A}_i$, $\forall i\in I$, 故有 $\mathfrak{A}_i\supseteq\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M(\bigcap_{j\in I}\mathfrak{A}_j)$, 从而 $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i\supseteq\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i)$. 因此, $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i=\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i)$, 即 $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ 满足 M-d.a.c.

定理的证明 设 A 是全体具复的常系数微分算子所构成的环, 那么 A 代数同构于复数域上 n 元多项式环 所以 A 是 Hilbert 环, 其根理想 $\mathfrak{A}=(T_1,\cdots,T_m)$ 可表为一些极大理想的交

令 M 是无穷次可微函数空间 按照通常微分作用视 M 为 A-模 如果 $\mathfrak{M}$ 是 A 的极大理想, 由 Hilbert 零点定理, $\mathfrak{M}$ 具有形式 $(\frac{\partial}{\partial x_1}-a_1,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}-a_n)$, 其中 $a_1,\cdots,a_n\in C$ (C 表复数域).

记 $\mathfrak{M}$ 在 A-模 M 中的零化子为 $\mathrm{ann}_M\mathfrak{M}$ 则 $\mathrm{ann}_M\mathfrak{M}$ 是微分算子组 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}-a_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 的公共解所构成的向量空间 因为函数 $e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}\in\mathrm{ann}_M\mathfrak{M}$ 因而 $\mathrm{ann}_M\mathfrak{M}\neq 0$, 从而二重零化子 $\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M\mathfrak{M}\neq A$. 又, $\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M\mathfrak{M}\supseteq\mathfrak{M}$ 所以 $\mathrm{ann}_A\mathrm{ann}_M\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ 这就证明: A 的任何极大理想 $\mathfrak{M}$ 都满足 M-d.a.c. 由引理知, $\mathfrak{A}$ 满足 M-d.a.c., 因而 $\mathfrak{A}$ 是 Z-素理想

推论 如果微分算子 D 具形式 $\prod_{i,j}(\frac{\partial}{\partial x_i}-a_j)^{l_{ij}}$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$, j 是任意整数, l_{ij} 是非负整数, a_j 是任意复数, 那么在常系数微分算子环中, 理想 (D) 是 Z-素的

作者感谢陆洪文教授的有益建议

参 考 文 献

[1] 钟家庆, 微分算子环的素理想, 数学年刊, 1(3, 4), 1980, 359—374