第17卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 17 No. 2
1997年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1997

正交小波包的构造*

杨守志　　　杨晓忠　　程正兴
(河南信阳师范学院数学系, 464000)　　(西安交通大学, 710049)

摘　要　本文给出尺度因子 $a=4$ 时正交小波包的构造, 推广了[2, 4]引入的正交小波包, 并给出相应的分解与再构造算法. 本文引入的正交小波包具有保持信号 $f\in L^2$ 的线性相位, 也讨论了尺度因子 $a=k\ (k\in\mathbb{Z}, k\geq 2)$ 正交小波的构造.

关键词　小波, 正交小波包, 多分辨分析
分类号　AMS(1991) 42C15/CCL O174.42

一　引　言

小波理论是近年才发展起来的数学分枝, 它在科学、工程等方面有广泛的应用. Coifman 和 Meyer[2, 4]首次引入正交小波包的概念, 它用于进一步分解小波分量. 崔锦泰与李淳[3]把正交小波包理论推广到非正交小波包, 使对样条小波等可以使用小波包. 程正兴[5]引入具有矩阵小波包, 推广了[2, 4], [3]的结果, 使之在应用上更灵活. 对尺度因子 $a=4$ 有人讨论了紧支撑正交对称尺度函数及正交小波的构造方法(第一作者的硕士论文的一部分). 本文引入尺度因子 $a=4$ 时, 正交小波包的概念、性质及相应分解与重构算法. 这种小波包既拥有[2, 4]引入的小波包的特点, 又拥有[3]引入非正交小波包的一些特点. 最后, 讨论一般尺度因子 k (k 为大于 2 的整数) 的正交小波包的构造.

本文中, 用 $L^2(R)$ 表示实直线上所有平方可积函数的空间, l^2 表示平方和序列空间, 并且在 L^2 中函数的内积和 Fourier 变换分别记为

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \tag{1.1}$$

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x)\,dx, \tag{1.2}$$

对任意的函数 f, 总是使用记号

$$f_{j,k}(x) = 4^{j/2} f(4^j x - k). \tag{1.3}$$

二　多分辨分析与小波包

满足 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,dx = 0$ 的函数 $\psi(x)\in L^2(R)$ 称为小波(也称母小波), 研究小波的重要方法

* 1994年6月7日收到

之一是通过多分辨分析(Multire-Solution analysis).

称 $\varphi(x)$ 是尺度函数 如果

$$\varphi(x)=\sum p_k\varphi(4x-k). \tag{2.1}$$

称 $\varphi(x)$ 是正交的尺度函数, 如果

$$\langle\varphi(x-j),\varphi(x-k)\rangle=\delta_{j,k}. \tag{2.2}$$

称 $\varphi(x)$ 是对称的尺度函数, 如果

$$\varphi(a-x)=\varphi(a+x),\quad x\in R, \tag{2.3}$$

其中 a 为常数

今知, 对任何函数 $\varphi\in L^2(R)$, 下面论断是等价的

(i) $\{\varphi(x-k):k\in\mathbf{Z}\}$是一正交族: $\langle\varphi(\cdot-j),\varphi(\cdot-k)\rangle=\delta_{j,k},j,k\in\mathbf{Z}$

(ii) φ的 Fourier 变换满足 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ijw}|\hat{\varphi}(w)|^2dx=\delta_{j,0},j\in\mathbf{Z}$

(iii) 恒等式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(w+2\pi k)|^2=1$ 对几乎所有 w 成立

$$V_j=\operatorname{clos}_{L^2}\langle\varphi_{j,k},k\in\mathbf{Z}\rangle. \tag{2.4}$$

一个多分辨分析是指由(2.4)所定义的空间$\{V_j\}$具有如下性质:

(1) $\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$;

(2) $\operatorname{clos}_{L^2}(\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j)=L^2(R)$;

(3) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$;

(4) $f(x)\in V_m\Leftrightarrow f(4x)\in V_{m+1}$;

(5) $\forall m\in\mathbf{Z},V_m=\operatorname{clos}_{L^2}\{\varphi_{m,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$, 且$\{\varphi_{m,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$是$V_m$ 中的无条件基 其中 $\varphi_{m,n}=4^{m/2}\varphi(4^mx-n)$.

设本文的尺度函数 φ是紧支撑正交对称的尺度函数, 构造的三个小波是紧支撑正交小波, 分别记为 ψ^1,ψ^2,ψ^3, 且满足:

$$\begin{cases}\langle\psi^r(\cdot-j),\psi^r(\cdot-k)\rangle=\delta_{j,k},\ j,k\in\mathbf{Z},r=1,2,3,\\ \langle\psi^1(\cdot-j),\psi^2(\cdot-k)\rangle=0,\ j,k\in\mathbf{Z},\\ \langle\psi^1(\cdot-j),\psi^3(\cdot-k)\rangle=0,\ j,k\in\mathbf{Z},\\ \langle\psi^2(\cdot-j),\psi^3(\cdot-k)\rangle=0,\ j,k\in\mathbf{Z}\end{cases} \tag{2.4}$$

设W_j 是V_{j+1}中V_j 的正交补, 即

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j, \tag{2.5}$$

则

$$W_j=\operatorname{clos}_{L^2}\langle\psi^1_{j,k},\psi^2_{j,k'},\psi^3_{j,k''};k,k',k''\in\mathbf{Z}\rangle, \tag{2.6}$$

$$W^r_j=\operatorname{clos}_{L^2}\langle\psi^r_{j,k},k\in\mathbf{Z}\rangle,\ r=1,2,3. \tag{2.7}$$

定理 2.1 W_j,W^1_j,W^2_j,W^3_j 如(2.6), (2.7)式定义的子空间, 则

$$W_j=W^1_j\oplus W^2_j\oplus W^3_j,\quad j\in\mathbf{Z} \tag{2.8}$$

证略

由定理2 1, $L^2(R)$可写成如下分解形式

$$L^2(R)=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}W_j=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}(W_j^1\oplus W_j^2\oplus W_j^3).$$

为了说明小波包, 使用记号

$$\begin{cases}\mu_0(x)=\varphi(x),\\ \mu_1(x)=\varphi^1(x),\\ \mu_2(x)=\varphi^2(x),\\ \mu_3(x)=\varphi^3(x).\end{cases}$$

此时, $\varphi,\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3$的两尺度关系写为

$$\begin{cases}\mu_0(x)=\sum p_k^0\mu_0(4x-k),\\ \mu_1(x)=\sum p_k^1\mu_0(4x-k),\\ \mu_2(x)=\sum p_k^2\mu_0(4x-k),\\ \mu_3(x)=\sum p_k^3\mu_0(4x-k).\end{cases}\tag{2 10}$$

定义$\{p_k^r\}$序列的两尺度符号

$$p^r(z)=\frac{1}{4}\sum p_k^r z^k,\quad r=0,1,2,3\tag{2 11}$$

下面引入小波包的定义, 由它们可得到一组新的基底

定义2 1 由

$$\mu_{4l+r}(x)=\sum p_k^r\mu_l(4x-k),\quad r=0,1,2,3\tag{2 12}$$

定义的函数 μ_{4l+r}, $l=0,1,\cdots$, $r=1,2,3$ 称为关于尺度函数 $\mu_0=\varphi$的小波包

为了描述 μ_n 的付里叶变换, 对 $n\in Z_+$ 进行四进制展开

$$n=\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j 4^{j-1},\quad \epsilon_j=\{0,1,2,3\}.\tag{2 13}$$

定理2 2 设 n 为任意非负整数, 并且 n 的四进制展式由(2 13)式给出, 则正交小波 Packets μ_n 的付里叶变换 $\hat{\mu}_n$ 由下式给出:

$$\hat{\mu}_n(w)=\prod_{j=1}^{\infty}P^{\epsilon_j}(e^{-iw/4^j}),\quad w\in R.\tag{2 14}$$

证明 对(2 12)式两边取付里叶变换得

$$\hat{\mu}_{4l+r}(w)=P^r(e^{-iw/4})\hat{\mu}_l(\frac{w}{4}).\tag{2 15}$$

用数学归纳法证明(2 14)式, 假定(2 14)对所有 $0\leq n<4^{s_0}$成立, 考虑 $4^{s_0}\leq n<4^{s_0+1}$又 $n=4[\frac{n}{4}]+\epsilon_1$, 由(2 15)有

$$\hat{\mu}_n(w)=P^{\epsilon_1}(e^{-iw/4})\hat{\mu}_{n_1}(\frac{w}{4}).\tag{2 16}$$

另一方面, 因为 $n_1=[\frac{n}{4}]=\sum_{j=1}^{s_0}\epsilon_{j+1}4^{j-1}<4^{s_0}$, 由归纳假定 $\mu_{n_1}=\prod_{j=1}^{\infty}p^{\epsilon_{j+1}}(e^{-iw/4^j})$, 并用(2 16)便得到(2 14)式

定理2.3 设φ是任意正交尺度函数, 且$\{\mu_n\}$是关于φ的小波Packets, 则对每一个$n\in \mathbf{Z}_+$,

$$\langle \mu_n(\bullet - j), \mu_n(\bullet - k)\rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z} \tag{2.17}$$

证明 因为$\mu_0=\varphi$满足(2.17), 对(2.17)使用数学归纳法. 假定(2.17)满足$0\leq n< 4^{s_0}$的所有n成立, 考虑$4^{s_0}\leq n< 4^{s_0+1}$, 利用定理2.2, 有

$$\begin{aligned}
\langle \mu_n(\bullet - j), \mu_n(\bullet - k)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\mu}_n(w)\right|^2 e^{-i(k-j)w}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|P^{\epsilon_1}(e^{-iw/4})\right|^2 \left|\hat{\mu}_{[\frac{n}{4}]}(\frac{w}{4})\right|^2 e^{-i(k-j)w}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{8\pi l}^{8\pi(l+1)} \left|P^{\epsilon_1}(e^{-iw/4})\right|^2 \left|\hat{\mu}_{[\frac{n}{4}]}(\frac{w}{4})\right|^2 e^{-i(k-j)w}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{8\pi} e^{-i(k-j)w}\left|P^{\epsilon_1}(e^{-iw/4})\right|^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left|\hat{\mu}_{[\frac{n}{4}]}(\frac{w}{4}+2\pi l)\right|^2 dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{8\pi} e^{-i(k-j)w}\left|P^{\epsilon_1}(e^{-iw/4})\right|^2 dw.
\end{aligned}$$

因之, 用归纳假设得到

$$\begin{aligned}
\langle \mu_n(\bullet - j), \mu_n(\bullet - k)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{8\pi} e^{-i(k-j)w}\left|P^{\epsilon_1}(e^{-iw/4})\right|^2 dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(k-j)}\{\left|P^{\epsilon_1}(z)\right|^2 + \left|P^{\epsilon_1}(w_1z)\right|^2 + \left|P^{\epsilon_1}(w_2z)\right|^2 + \left|P^{\epsilon_1}(w_3z)\right|^2\}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(k-j)w}dw = \delta_{j,k}.
\end{aligned}$$

其中用到下面恒等式

$$\left|P^{\epsilon}(z)\right|^2 + \left|P^{\epsilon}(w_1z)\right|^2 + \left|P^{\epsilon}(w_2z)\right|^2 + \left|P^{\epsilon}(w_3z)\right|^2 = 1, \tag{2.18}$$

其中$\epsilon=0,1,2,3$, $z=e^{-iw/4^k}$, w_k**为**$z^4-1=0$**的非1的三个根**($k=1,2,3$).

定理2.4 令$\{\mu_n\}$是关于正交尺度函数φ的正交小波包, 则

$$\langle \mu_{4n}(\bullet - j), \mu_{4n+\epsilon}(\bullet - k)\rangle = 0, \quad \epsilon = 1,2,3, \ j,k\in \mathbf{Z} \tag{2.19}$$

证明 已知有下恒等式

$$\begin{aligned}
P^{\epsilon_j}(z) + P^{\epsilon_k}(z) + P^{\epsilon_j}(w_1z)\cdot P^{\epsilon_k}(w_1z) + P^{\epsilon_j}(w_2z)\cdot P^{\epsilon_k}(w_2z) \\
+ P^{\epsilon_j}(w_3z)\cdot P^{\epsilon_k}(w_3z) = 0,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中$|z|=1$, w_k**为**$z^4-1=0$**的三个非1根**($k=1,2,3$), $\epsilon_j\neq\epsilon_k$, $\epsilon_j,\epsilon_k\in\{0,1,2,3\}$.

利用(2.20)和定理2.3的类似方法, 很容易证明定理2.4

下面看空间$L^2(R)$**的正交分解. 令**

$$U_j^n = \operatorname{clos}_{L^2(R)}\langle 4^{j/2}\mu_n(4^jx-k), k\in \mathbf{Z}\rangle. \tag{2.21}$$

定理2.5 n**为非负整数, 那么**

$$U_{j+1}^n = U_j^{4n}\oplus U_j^{4n+1}\oplus U_j^{4n+2}\oplus U_j^{4n+3}. \tag{2.22}$$

利用定义2.1及定理2.4很容易证明定理2.5.

定理2.6 **对每一个**$j=1,2,\cdots$

$$W_j^r = U_{j-k}^{r\times 4^k} \oplus U_{j-k}^{r\times 4^k+1} \oplus \cdots \oplus U_{j-k}^{(r+1)\times 4^k-1}, \tag{2.23}$$

$$W_j^r = U_0^{r\times 4^j} \oplus U_0^{r\times 4^j+1} \oplus \cdots \oplus U_0^{(r+1)\times 4^j-1}, \tag{2.24}$$

其中 $k=1,2,\cdots$, $r=1,2,3$.

推论 2.7 对每一个 $j=0,1,2,\cdots$

$$L^2(R) = \underset{j\in\mathbf{Z}}{\oplus} W_j = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus U_0^4 \oplus U_0^5 \oplus \cdots$$
$$= \cdots \oplus (W_{-1}^1 \oplus W_{-1}^2 \oplus W_{-1}^3) \underset{k\in\mathbf{Z}}{\oplus} U_0^k, \tag{2.25}$$

族$\{\psi_{j,k}, \mu_n(\cdot - k): j=\cdots -2,-1, r=1,2,3, n=0,1,2,\cdots, k\in\mathbf{Z}\}$是$L^2(R)$的一组正交基.

下面给出相应于定理 2.5 的分解与再构造算法.

设 $f_j^n(x)\in U_j^n$, 则 $f_j^n(x)$ 可表示为

$$f_j^n(x) = \sum_l d_l^{j,n} \mu_n(4^j x - l). \tag{2.26}$$

由(2.22), f_{j+1}^n 分解为 $f_j^{4n}, f_j^{4n+1}, f_j^{4n+2}, f_j^{4n+3}$, 则有

分解算法:

$$d_l^{j,4n+\epsilon} = \sum_k a_{k-4l}^{(\epsilon)} d_k^{j+1,n}, \quad \epsilon = 0,1,2,3, \tag{2.27}$$

再构造算法:

$$d_e^{j+1,n} = \sum_k \sum_{\epsilon=0}^{3} p_{l-4k}^{(\epsilon)} d_l^{j,4n+\epsilon}. \tag{2.28}$$

三 尺度因子为 a 时正交小波包的构造

本节中尺度因子 a 为不小于 2 的整数.

为了引入小波包, 仍设 $\varphi(x)$ 是正交尺度函数, 假设存在 $a-1$ 个正交小波 ψ^r $(r=1,2,\cdots,a-1)$. $\varphi(x)$, ψ^r 相应的尺度符号为 $P^r(z)$ $(r=0,1,\cdots,a-1)$, 具体地

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} P_k^0 \varphi(ax-k), \tag{3.1}$$

$$\psi^r(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} P_k^r \varphi(ax-k), \quad r=1,2,\cdots,a-1, \tag{3.2}$$

$$P^r(z) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}} P_k^r z^k, \quad r=0,1,\cdots,a-1, \tag{3.3}$$

用 $\mu_0(x)=\varphi(x)$, $\mu_r(x)=\psi^r(x)$.

定义 3.1 设 φ是任意正交尺度函数,

$$\mu_{al+r}(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} P_k^r \mu_l(ax-k), \tag{3.4}$$

其中 $r=0,1,\cdots,a-1$, $l=0,1,\cdots$, 定义$\{\mu_n\}$称为关于尺度函数 $\mu_0=\varphi$的正交小波包.

$n\in\mathbf{Z}_+$, 对 n 进行 a 进制展开:

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j a^{j-1}, \quad \epsilon_j = \{0,1,\cdots,a-1\}. \tag{3.5}$$

定理 3.2 n 为任意非负整数, 且 n 的 a 进制展开由(3.5)式给出, 则正交小波包 μ_n 的付

里叶变换 $\hat{\mu}_n$ 由下式给出:

$$\hat{\mu}_n(w) = \prod_{j=1}^{\infty} P^{\epsilon_j}(e^{-iw/a^j}), \quad w \in R. \tag{3.6}$$

定理3.3 令$\{\mu_n\}$是关于正交尺度函数φ的正交小波包, 则

$$\langle \mu_n(\cdot - j), \mu_n(\cdot - k) \rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}_+. \tag{3.7}$$

定理3.4 令$\{\mu_n\}$是关于正交尺度函数φ的正交小波包, 则

$$\langle \mu_{an}(\cdot - j), \mu_{an+\epsilon}(\cdot - k) \rangle = 0, \quad \epsilon = 1, 2, \cdots, a-1. \tag{3.8}$$

定理3.5 n 为非负整数, 那么

$$U_{j+1}^{n} = U_j^{an} \oplus U_j^{an+1} \oplus \cdots \oplus U_j^{an+a-1}. \tag{3.9}$$

定理3.2—定理3.5的证明完全类似第二节相应的定理的证明. 对于尺度因子为 a 时, 也具有相应的分解算法与再构造算法, 该算法与第二节类似.

参 考 文 献

[1] C. K. Chui 著, 程正兴译, 小波分析导论, 西安交通大学出版社, 1994.

[2] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Orthonormal wavelet packet bases*, Preprint.

[3] C. K. Chui and Li Chun, *Non-orthonormal wavelet pactets*, CAT. Repert 261, 12, 1991.

[4] M. V. Wickerhauser, *Acoustic signal compression with wavelet pactets in wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui(ed), Academic Press, Boston, 1992, 679-700.

[5] 程正兴, 具有矩阵的小波包, 工程数学学报, 1(1994), 15—28.

Construction of Orthonormal Wavelet Packets

Yang Shouzhi

(Xinyang Teacher's College, 464000)

Yang Xiao Zhong　　*Cheng Zhengxing*

(Xi'an Jiaotong University, 710049)

Abstract

In this paper, the notion of orthonormal wavelet packets introduced by Coifman and Meyer is generalized to wavelet packets with the scaling factor a $(a \geq 2, a \in \mathbf{Z})$. Algorithms for implementations are also developed.

Keywords wavelet, orthonormal wavelet packets, multi-resolution analysis