第17卷第2期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 17 No. 2
1997年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1997

关于Bernstein的一个插值多项式*

朱 来 义
(中国人民大学信息学院, 北京 100872)

摘　要　本文证得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{f\in C_{[-1,1]}}\max\limits_{x\in[-1,1]}|P_n(f,x)|=+\infty$, 因此 $P_n(f,x)$ 不能对一切 $f(x)C_{[-1,1]}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

关键词　第一类chebyshev多项式的零点, 修正的Lagrange插值多项式, 一致收敛
分类号　AMS(1991) 41A10/CCL O174.41

设

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1,2,\cdots,n$$

是第一类chebyshev多项式 $T_n(x)=\cos n\arccos x$ 的零点, $f(x)\in C_{[-1,1]}$, 则 $f(x)$ 在 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 上的Lagrange插值多项式 $L_n(f,x)$ 为

$$L_n(f,x)=\sum_{k=1}^n f(x_k)l_k^{(n)}(x),\tag{1}$$

其中

$$l_k^{(n)}(x)=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)},\quad \omega_n(x)=\prod_{k=1}^n(x-x_k).\tag{2}$$

$f(x)$ 在 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 上的Hermite-Fejér插值多项式 $H_{2n-1}(f,x)$ 为:

$$H_{2n-1}(f,x)=\sum_{k=1}^n f(x_k)(1-xx_k)\left[\frac{T_n(x)}{x-x_k}\right]^2.\tag{3}$$

由Faber和Bernstein定理知道: 存在 $f(x)\in C_{[-1,1]}$, 使得 $L_n(f,x)$ 在 $[-1,1]$ 上不一致收敛于 $f(x)$. 由Fejér的定理知道: 对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$, $H_{2n-1}(f,x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 这是由于 $H_{2n-1}(f,x)$ 的次数是 $L_n(f,x)$ 的次数的两倍. 1930年, S. Bernstein在哈尔科夫召开的"全苏数学代表大会"上提出了如下问题: 给定 λ, $1<\lambda<2$, 对于任意的连续函数 $f(x)$ 是否可以构造次数 $M<\lambda N$ 的插值多项式与 $f(x)$ 在给定的 N 个点上相同, 当 $N\to+\infty$ 时, 一致收敛于 $f(x)$? 在文献[1]中, S. Bernstein构造了 $2l$-adjusted插值多项式(见[2]和[3])回答了上述的问题. 关于 $2l$-adjusted插值多项式的最新结果可参看文献[3]. 另外, 在文献[2]中, S. Bernstein还构造了一种修正的Lagrange插值多项式

$$P_n(f,x)=\frac{2T_n(x)}{n(2h+1)}\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k+1}f(x_k)\sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)^2}\sin(2h+1)\arcsin\frac{x-x_k}{2},\tag{4}$$

* 1994年6月27日收到. 国家自然科学基金资助项目.

其中 $f(x)\in C_{[-1,1]}$, $0<\delta_1\le\frac{2h}{n}<\delta_2<1$, h 是自然数, δ_1,δ_2 是给定的正数. 这是一个 $n+2h-1$ 次多项式, 在 n 个点 $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 上与 $f(x)$ 的值相同. 由文献[1]知道: 对任意的正数 ϵ, 设 p_ϵ 是满足 $\frac{4L}{\pi\delta_1 p_\epsilon}<\frac{\epsilon}{2}$ 的自然数, $L=\max\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|\overset{记}{=}\|f\|$, 当 n 满足 $3p_\epsilon\omega(\frac{2p_\epsilon\pi}{n})<\frac{\epsilon}{2}$ 时, 对任何 $x\in(-1,1)$ 有

$$\sqrt{1-x^2}\,|P_n(f,x)-f(x)|<3p_\epsilon\omega(\frac{2p_\epsilon\pi}{n})+\frac{4L}{\pi\delta_1 p_\epsilon}<\epsilon, \tag{5}$$

这里 $\omega(t)$ 是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续模.

显然, (5) 式不足以说明对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$, $P_n(f,x)$ 在端点 -1 和 1 处不收敛于 $f(x)$. 本文证得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{\substack{f\in C_{[-1,1]}\\ \|f\|\le 1}}\max_{x\in[-1,1]}|P_n(f,x)|=+\infty,$$

从而说明了插值多项式 $P_n(f,x)$ 不能对一切 $f(x)\in C_{[-1,1]}$, 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 结果为:

定理 设 $n=2m+1$, $h=[\frac{m}{2}]$, 存在 $f_m(x)\in C_{[-1,1]}$, $\|f_m\|\le 1$, 使得

$$P_{2m+1}(f_m,1)\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\ln m. \tag{6}$$

由此可即得如下推论:

推论 对于插值多项式(4), 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{\substack{f\in C_{[-1,1]}\\ \|f\|\le 1}}\max_{x\in[-1,1]}|P_n(f,x)|=+\infty. \tag{7}$$

定理的证明 由于

$$(-1)^{k+1}\sin(2h+1)\arcsin\sqrt{\frac{1-x_k}{2}}=\sin[(k+1)\pi+(2h+1)\arcsin\sqrt{\frac{1-x_k}{2}}],$$

构造线性函数 $f_m(x)$ 使得

$$f_m(x_k)=\operatorname{sgn}(\sin[(k+1)\pi+(2h+1)\arcsin\sqrt{\frac{1-x_k}{2}}]), \tag{8}$$

则

$$P_n(f_m,1)=\frac{2}{n(2h+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(1-x_k)^2}\left|\sin(2h+1)\arcsin\sqrt{\frac{1-x_k}{2}}\right|, \tag{9}$$

这里 $n=2m+1$, $h=[\frac{m}{2}]$. $\frac{n+2h-1}{n}=1+\frac{2[\frac{m}{2}]-1}{2m+1}\to\frac{3}{2}$. 因此

$$P_n(f_m,1)\ge\frac{2}{n(2h+1)}\sum_{k=1}^{h}\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(1-x_k)^2}\left|\sin(2h+1)\arcsin\sqrt{\frac{1-x_k}{2}}\right|. \tag{10}$$

由于

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{4m+2}\pi,\quad \frac{1-x_k}{2}=\sin^2\frac{2k-1}{8m+4}\pi,\qquad k=1,2,\cdots,h,$$

则

$$0\le\frac{1-x_k}{2}\le\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}. \tag{11}$$

又由于

$$\left|\sin(2h+1)\arcsin\frac{1-x_k}{2}\right|=\left|\cos(2h+1)\arccos\frac{1-x_k}{2}\right|=\left|T_{2h+1}\left(\frac{1-x_k}{2}\right)\right|$$

$T_{2h+1}(x)$的零点为$x_j^{(h)}=\cos\frac{2j-1}{4h+2}\pi, j=1,2,\cdots,2h+1.$ 则 $j=h+1$时,

$$x_j^{(h)}=0, x_h^{(h)}=\sin\frac{\pi}{2h+1}.$$

即$T_{2k+1}(x)$在$[0,1]$中最靠近0的一个零点为$\sin\frac{\pi}{2h+1}$, 在这之间$T_{2h+1}(x)$不变号. 另外, 当$1\le k\le[\sqrt{m}]$时

$$0\le\frac{1-x_k}{2}=\sin^2\frac{2k-1}{8m+4}\pi\le\left(\frac{\pi}{4\sqrt{m}}\right)^2\le\sin\frac{\pi}{2(2h+1)},$$

从而

$$0\le(2h+1)\arcsin\frac{1-x_k}{2}\le\frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

因此由(10), (12)可得

$$\begin{aligned}P_n(f_m,1)&\ge\frac{2}{(2m+1)(2h+1)}\sum_{k=1}^{[\sqrt{m}]}\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(1-x_k)^2}\sin(2h+1)\arcsin\frac{1-x_k}{2}\\&\ge\frac{2}{(2m+1)(2h+1)}\sum_{k=1}^{[\sqrt{m}]}\frac{1}{(1-x_k)^{\frac{3}{2}}}\frac{2(2h+1)\arcsin\frac{1-x_k}{2}}{\pi}\\&\ge\frac{2}{(2m+1)\pi}\sum_{k=1}^{[\sqrt{m}]}\frac{1}{\sqrt{1-x_k}}.\end{aligned}$$

由于$1-x_k=2\sin^2\frac{2k-1}{8m+4}\pi$, 因此

$$\sqrt{1-x_k}\le\sqrt{2}\,\pi\frac{2k-1}{8m+4}. \tag{14}$$

由(13), (14)可得

$$P_n(f_m,1)\ge\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{[\sqrt{m}]}\frac{1}{2k-1}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{[\sqrt{m}]}\frac{1}{k}\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\ln m.$$

这就完成了定理的证明

参 考 文 献

[1] S. Bernstein, *On a class of modifing Lagrange interpolation formulea*, Acad. Nauk. S. S. S. R. S. N. Bernstein collected works, II (1954), 130- 140 (Russian).

[2] A. Zygmund, Trigonometric Series, Vol 2, 26.

[3] 朱来义, 关于修正的Lagrange插值多项式, 数学学报, 36: 1(1993), 136- 144.

On an Interpolation Polynomial of Bernstein

Zhu Laiyi
(People's University of China, Beijing 100872)

Abstract

In the present paper we prove

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\substack{f\in C_{[-1,1]}\\ \|f\|\leq 1}} \max_{x\in[-1,1]} \left|P_n(f,x)\right| = +\infty.$$

Therefore it isn't true that $P_n(f,x)$ converges to $f(x)$ uniformly in $[-1,1]$ for any $f(x)\in C_{[-1,1]}$.

Keywords zeros of the first kind of chebyshev polynomial, modifing Lagrange interpolation polynomial, uniform convergence