第 17 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 2
1997 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

可逆的渐近非扩张型半群的遍历定理*

王 为 民
(浙江工业大学基础部, 杭州 310014)

摘 要 本文在 Hilbert 空间中证明了右可逆的连续渐近非扩张型半群的遍历保核收缩存在定理, 并讨论了可控的连续渐近非扩张型半群的遍历收敛定理.

关键词 渐近非扩张型半群, 非扩张保核收缩, 遍历定理
分类号 AMS(1991) 47H35, 47H09/CCL O177.9

§1 引 言

设 C 是 Banach 空间 X 中的非空闭凸子集, S 是右可逆的半拓扑半群, $\mathbf{T}=\{T_s: s\in S\}$ 是一族从 C 到 C 中的自映射. $\mathbf{T}$ 叫做右可逆的渐近非扩张型半群是指 $\mathbf{T}$ 满足下列条件:

(i) 对所有 $s, t\in S$, $x\in C$, $T_{st}x=T_sT_tx$;

(ii) 对每一 $x\in C$, 映射 $s\to T_sx$ 从 S 到 C 中是连续的;

(iii) 对每一 $x\in C$, $\overline{\lim\limits_{s\in S}}\,[\sup\limits_{y\in C}(\|T_sx-T_sy\|-\|x-y\|)]\le 0$.

显然, 右可逆的非扩张半群是右可逆的渐近非扩张半群; 右可逆的渐近非扩张半群是右可逆的渐近非扩张型半群. 反之均不成立[4,6]. 设 $\mathbf{T}=\{T_s: s\in S\}$ 是右可逆的渐近非扩张型半群, 如果对每一 $s\in S$, T_s 是连续的, 则称 $\mathbf{T}$ 为右可逆的连续渐近非扩张型半群.

第一个关于非扩张映射遍历收敛定理是由 Baillon[1] 在 1975 年证得的: 设 C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集, T 是 C 上的非扩张自映射且有不动点, 则对每一 $x\in C$, Cesàro 中值

$$S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx,\quad n=1,2,\cdots$$

弱收敛于 T 的不动点. 之后, Baillon 和 Brézis[2] 又获得了单参数非扩张半群的遍历收敛定理. 最近, 游兆永和徐洪坤[9] 证明了连续渐近非扩张型映射的遍历收敛定理. 另一方面, Takahashi[8] 研究了右可逆的非扩张半群的遍历保核收缩的存在性. Rodé[7] 讨论了可控的非扩张半群的遍历收敛定理, 并推广了 Cesàro 中值. 本文的目的是在 Hilbert 空间中将上述结果推广到右可逆(或可控)的连续渐近非扩张型半群.

记号: 除特别指明外, H 表示实 Hilbert 空间; S 表示右可逆的半拓扑半群; $\to$ 表示强收敛; $\overline{co}D$ 表示 D 的凸闭包; $F(\mathbf{T})$ 表示 $\mathbf{T}=\{T_s: s\in S\}$ 的公共不动点集合.

在本文主要结果的证明中, 下面的引理起着重要的作用.

引理 1 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\{x_s\}_{s\in S}$ 是 C 中的有界网. 令

* 1994 年 1 月 3 日收到. 1996 年 5 月 15 日收到修改稿.

$$g(x)=\overline{\lim_{s\in S}}\|x_s-x\|^2,\quad x\in C$$

则存在唯一点 $z\in C$ **使得** $g(z)=\inf\{g(x): x\in C\}$.

引理 2 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{T}=\{T_s: s\in S\}$是右可逆的连续渐近非扩张型半群, 则 $F(\mathbf{T})$是闭凸集

引理 3 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{T}=\{T_s: s\in S\}$是右可逆的连续渐近非扩张型半群, $F(\mathbf{T})\neq\varnothing$. 对 $x\in C$, 网$\{T_sx\}_{s\in S}$有界, 则集合

$$\bigcap_{t\in S}\overline{\mathrm{co}}(T_sx: s\geq t)\cap F(\mathbf{T})$$

至多含有一点

§2 主要结果

命题 1 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{T}=\{T_s: s\in S\}$是右可逆的连续渐近非扩张型半群, $F(\mathbf{T})\neq\varnothing$. 设 P 是从 H 到 $F(\mathbf{T})$上的度量投影, 则对 $x\in C$, 网$\{P(T_sx)\}_{s\in S}$强收敛于一点 $z\in F(\mathbf{T})$. 而且, 若网$\{T_sx\}_{s\in S}$弱收敛于一点 $y\in F(\mathbf{T})$, 则 $y=z$.

证明 对每一 $t\in S$ 和任意 $\epsilon>0$, 存在 $s_0\in S$, 使得 $s\geq s_0$ 时, 有

$$\|T_sP(T_tx)-T_sT_tx\|<\|P(T_tx)-T_tx\|+\epsilon$$

当 $s\geq s_0t$ 时, 不妨设 $s\neq s_0t$, 则存在网$\{s_\alpha\}\subset S$ 使得 $s_\alpha s_0t\to s$, 于是

$$\|P(T_tx)-T_{s_\alpha s_0t}x\|=\|T_{s_\alpha s_0}P(T_tx)-T_{s_\alpha s_0}T_tx\|\leq\|P(T_tx)-T_tx\|+\epsilon,$$

$$\|P(T_sx)-T_sx\|\leq\|P(T_tx)-T_sx\|\leq\|P(T_tx)-T_tx\|+\epsilon$$

由 ϵ的任意性得$\lim\limits_{s\in S}\|P(T_sx)-T_sx\|$存在 据度量投影的性质[9], 可知

$$\|P(T_sx)-P(T_tx)\|^2\leq\|T_sx-P(T_tx)\|^2-\|P(T_sx)-T_sx\|^2$$
$$\leq(\|P(T_tx)-T_tx\|+\epsilon)^2-\|P(T_sx)-T_sx\|^2.$$

再由 ϵ的任意性得

$$\overline{\lim_{t\in S}}\ \overline{\lim_{s\in S}}\|P(T_sx)-P(T_tx)\|^2=0$$

故$\{P(T_sx)\}$是 H 中的 Cauchy 网 因此, 该网必强收敛于某一点 $z\in F(\mathbf{T})$.

如果网$\{T_sx\}$弱收敛于一点 $y\in F(\mathbf{T})$, 由度量投影的性质[9], 对所有 $u\in F(\mathbf{T})$, $s\in S$, 有

$$\langle T_sx-P(T_sx), u-P(T_sx)\rangle\leq 0,$$

因此, $\langle y-z, u-z\rangle\leq 0$ 取 $u=y$ 得 $y-z$. □

下面的定理 1 推广了 Takahashi[8]的结果

定理 1 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{T}=\{T_s: s\in S\}$是右可逆的连续渐近非扩张型半群, $F(\mathbf{T})\neq\varnothing$. 对每一 $x\in C$, 网$\{T_sx\}_{s\in S}$有界, 则下列条件等价:

(i) $\bigcap\limits_{t\in S}\overline{\mathrm{co}}(T_sx: s\geq t)\cap F(\mathbf{T})\neq\varnothing$.

(ii) 存在一个从 C 到 $F(\mathbf{T})$上的非扩张保核收缩 Q 使得对每一 $s\in S$, $QT_s=T_sQ=Q$, 而且 $Qx\in\overline{\mathrm{co}}(T_sx: s\in S)$.

证明 (ii)$\Rightarrow$(i). 显然, $Qx\in F(\mathbf{T})$. 因为对每一 $t\in S$, 有

$$Qx=QT_tx\in\overline{\mathrm{co}}(T_sT_tx: s\in S)=\overline{\mathrm{co}}(T_sx: s\geq t),$$

所以

$$Qx \in \bigcap_{t\in S} \overline{\mathrm{co}}\,(T_s x: s \geq t).$$

(i) ⇒ (ii). 由引理 3 知

$$\bigcap_{t\in S} \overline{\mathrm{co}}\,(T_s x: s\geq t) \cap F(\mathbf{T}) = \{z\},$$

$$\overline{\lim_{s\in S}} \|T_s x - z\|^2 = \inf\{\overline{\lim_{s\in S}} \|T_s x - y\|^2 : y \in F(\mathbf{T})\}.$$

设 P 是从 H 到 $F(\mathbf{T})$ 上的度量投影, 由命题 1 知, $\{P(T_t x)\}$ 强收敛于某一 $v\in F(\mathbf{T})$. 下面证明 $v=z$. 对每一 $t\in S$. ϵ 和 s_0 如同在命题 1 中. 设 $s\geq s_0 t$, 不妨设 $s\in \overline{S_{s_0 t}}$, 则存在网 $\{s_\alpha\}\subset S$ 使得 $s_\alpha s_0 t \to s$ 进而

$$\|P(T_t x) - T_{s_\alpha s_0 t} x\|^2 = \|T_{s_\alpha s_0} P(T_t x) - T_{s_\alpha s_0} T_t x\|^2 \leq (\|P(T_t x) - T_t x\| + \epsilon)^2.$$

由 ϵ 的任意性得 $\forall y\in F(\mathbf{T})$, $\forall t\in S$, 有

$$\overline{\lim_{s\in S}} \|T_s x - P(T_t x)\|^2 \leq \|y - T_t x\|^2,$$

$$\overline{\lim_{s\in S}} \|T_s x - v\|^2 \leq \overline{\lim_{t\in S}} \|T_t x - y\|^2,$$

于是, 据引理 1, $v = z = \lim_{t\in S} P(T_t x)$.

对每一 $x\in C$, 令 $Qx = \lim_{t\in S} P(T_t x)$, 则对每一 $s\in S$, $T_s Qx = Qx$ 且

$$QT_s x = \lim_{t\in S} P(T_t T_s x) = \lim_{t\in S} P(T_{ts} x) = Qx,$$

$Qx \in \overline{\mathrm{co}}\,(T_s x: s\in S)$ 是显然的. 最后, 对 $x, y\in C$

$$\|Qx - Qy\| = \lim_{t\in S} \|P(T_t x) - P(T_t y)\|.$$

任给 $\epsilon_2 > 0$, 存在 $t_2\in S$, 当 $t\geq t_2$ 时, 有

$$\|T_t x - T_t y\| \leq \|x - y\| + \epsilon_2,$$

$$\overline{\lim_{t\in S}} \|T_t x - T_t y\| \leq \|x - y\| + \epsilon_2$$

由 ϵ_2 的任意性及 P 是非扩张的, 即得 $\|Qx - Qy\| \leq \|x - y\|$. 证毕.

以下总假定 S 是可控的半拓扑半群. 周知可控的半拓扑半群是右可逆的[3,5]. 若 μ 是 S 上的中值, C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{T} = \{T_s: s\in S\}$ 是可控的连续渐近非扩张型半群, 则对每一 $x\in C$, 存在唯一的点 $\mathbf{T}_\mu x\in H$, 使得

$$\langle \mathbf{T}_\mu x, y\rangle = \int \langle T_s x, y\rangle d\mu(s), \quad \forall y\in H,$$

且 $\mathbf{T}_\mu x \in \mathrm{co}\,(T_s x: s\in S)$[7]. 记 $\mathbf{T}_\mu x \overset{\triangle}{=} \int T_s x\, d\mu(s)$.

命题 2 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{T} = \{T_s: s\in S\}$ 是可控的连续渐近非扩张型半群, 对每一 $x\in C$, 网 $\{T_s x\}_{s\in S}$ 有界. 又设 μ, λ 是 S 上任意两个不变中值, 则 $\mathbf{T}_\mu x = \mathbf{T}_\lambda x \in F(\mathbf{T})$.

证明 对每一 $x\in C$, 令 $z = \mathbf{T}_\mu x$. 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $s_0\in S$, 使得 $s\geq s_0$ 时, $\forall t\in S$, 有

$$\begin{aligned} -\epsilon &\leq \|T_t x - z\|^2 - \|T_{st} x - T_s z\|^2 \\ &= \|T_t x - T_s z\|^2 + 2\langle T_t x - T_s z, T_s z - z\rangle + \|T_s z - z\|^2 - \|T_{st} x - T_s z\|^2. \end{aligned}$$

利用不变中值的性质[3], 可得

$$-\epsilon \leq \|T_s z - z\|^2 + 2\langle z - T_s z, T_s z - z\rangle = -\|T_s z - z\|^2.$$

由 ϵ 的任意性及 T_s 的连续性得 $z\in F(\mathbf{T})$.

对任意 $y\in H$, 因 μ 是不变中值, 故 $\forall t\in S$

$$\langle \mathbf{T}_{\mu}x, y\rangle = \int \langle T_s x, y\rangle d\mu(x) = \left\langle \int T_{st}x\, d\mu(s), y\right\rangle,$$

$$\mathbf{T}_{\mu}x = \int T_{st}x\, d\mu(s) \in \overline{\mathrm{co}}(T_{st}x : s\in S) = \overline{\mathrm{co}}(T_s x : s \geq t).$$

进而, 由引理 3 知 $\mathbf{T}_{\mu}x = \mathbf{T}_{\lambda}x$. 证毕

下面的定理 2 推广了 Rodé[7] 的结果

定理 2 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{T} = \{T_s : s\in S\}$ 是可控的连续渐近非扩张型半群, 对每一 $x\in C$, 网 $\{T_s x\}_{s\in S}$ 有界. 若 S 上的中值网 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是渐近不变的, 则 $\mathbf{T}_{\mu_\alpha}x$ 弱收敛于 $y\in F(\mathbf{T})$. 若令 $Q(x) = W\text{-}\lim\limits_{\alpha\in A}\mathbf{T}_{\mu_\alpha}x$, 则 $Q(x)\in\overline{\mathrm{co}}(T_s x: s\in S)$ 且 Q 是从 C 到 $F(\mathbf{T})$ 上的非扩张保核收缩, $QT_s = T_sQ = Q\ (\forall s\in S)$. 此外, $Q(x)$ 与 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的选择无关

证明 由[3]可知, 中值网 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 有弱* 聚点 μ, 而且 μ 是不变中值 于是, 据命题 2 知, $\mathbf{T}_{\mu}$ 是从 C 到 $F(\mathbf{T})$ 上的投影 可以证明: $\mathbf{T}_{\mu_\alpha}$ 按弱算子拓扑收敛于 $\mathbf{T}_{\mu}$. 事实上, 固定 $x\in C$, $y\in H$, 则函数 $f: S\to\mathbf{R}$, $f(s) = \langle T_s x, y\rangle(\forall s\in S)$ 是有界函数 对每一 S 上的中值 §, 按 $\mathbf{T}_{§}$ 的定义, 有

$$§(f) = \langle \mathbf{T}_{§}x, y\rangle = \int \langle T_s x, y\rangle d§(s).$$

如果 $a\in\mathbf{R}$ 是 $\{\mu_\alpha(f)\}_{\alpha\in A}$ 的聚点, 那么存在 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的弱* 聚点 λ 使得 $a = \lambda(f)$. 因为 λ 也是不变中值, 由命题 2 知, $\mathbf{T}_{\mu} = \mathbf{T}_{\lambda}$, 进而

$$a = \lambda(f) = \langle \mathbf{T}_{\lambda}x, y\rangle = \langle \mathbf{T}_{\mu}x, y\rangle,$$

$$\langle \mathbf{T}_{\mu_\alpha}x, y\rangle = \mu_\alpha(f) \to \lambda(f) = \langle \mathbf{T}_{\mu}x, y\rangle, \quad \alpha\in A.$$

令 $Q(x) = W\text{-}\lim\limits_{\alpha\in A}\mathbf{T}_{\mu_\alpha}x$, 从命题 2 得, $Q(x)$ 与 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的选择无关 与定理 1 的证明相仿, 可得, Q 是从 C 到 $F(\mathbf{T})$ 上的非扩张保核收缩, $QT_s = T_sQ = Q$ 且 $Q(x)\in\overline{\mathrm{co}}(T_s x: s\in S)$.

接下来讨论定理 2 的应用

设 T 是 C 上的连续渐近非扩张映射[6], $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 具有离散拓扑. $\forall n\in S$, 令 $T_n = T^n$. 设 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 S 上的中值网: $\forall f\in l_\infty$

$$\mu_\alpha(f) = \sum_{k=0}^{\infty} q_\alpha^k f(k), \ q_\alpha^k \geq 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} q_\alpha^k = 1,$$

则 $\{\mu_\alpha\}$ 是渐近不变的当且仅当 $\forall f\in l_\infty$,

$$\lim_{\alpha\in A}[\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(f^1)] = 0.$$

当 $A = \{1, 2, \cdots\}$ 时, 上式等价于

$$\lim_{n\to\infty}\left(q_n^0 + \sum_{k=0}^{\infty}\left|q_n^{k+1} - q_n^k\right|\right) = 0.$$

特别地, 令

$$q_n^k = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & k = 0, 1, \cdots, n-1, \\ 0, & k\geq n, \end{cases}$$

$f(k) = \langle T^k x, y\rangle$, $x, y\in H$, 则 $\mathbf{T}_{\mu_n}x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}T^k x$. 这样, 得到[9]中的定理 3.2

如果 $S = (0, +\infty)$ 具有自然拓扑, 那么可得单参数连续渐近非扩张型半群的遍历收敛定

理 它推广了Baillon 和Brézis[2]的结果, 且有

$$W - \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int T_t x\, dt = W - \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \int^{\infty} e^{-\lambda t} T_t x\, dt.$$

作者衷心感谢赵义纯教授的热情指导和鼓励.

参 考 文 献

[1] J. B. Baillon, C. R. Acad. Sci. Paris, 280(1975), 1511- 1514.

[2] J. B. Baillon and H. Brézis, Houston J. Math., 2(1976), 5- 7.

[3] M. M. Day, Illinois J. Math., 1(1957), 509- 544.

[4] K. Goebel and W. A. Kirk, Proc. Amer. Math. Soc., 35(1972), 171- 174.

[5] R. D. Holmes and A. T. Lau, J. London Math. Soc., 5(1972), 330- 336.

[6] W. A. Kirk, Israel J. Math., 17(1974), 339- 346.

[7] G. Rodé, J. Math. Anal. Appl., 85(1982), 172- 178.

[8] W. Takahashi, Proc. Amer. Math. Soc., 97(1986), 55- 58.

[9] 游兆永、徐洪坤, 数学年刊, 11(A) (1990), 519- 523.

Ergodic Theorems for Reversible Semigroups of Asymptotically Nonexpansive Type

Wang Weimin

(Zhejiang Univ. of Tech., Hangzhou 310014)

Abstract

In this paper, the existence theorem of ergodic retraction for a right reversible semigroup of asymptotically nonexpansive type is proved in the framework of Hilbert space. We discuss the ergodic convergence.

Keywords semigroup of asymptotically nonexpansive type, nonexpansive retraction, ergodic theorem.