Banach空间上的不连续映射的不动点定理*

毛　二　万**
(河北师范大学数学系, 石家庄 050016)

摘　要　本文把著名的Schauder定理推广到不连续映射的情形, 主要的结果表明对任一Banach空间中的任一给定的紧凸子集上的任一自映射, 可以在紧凸集上找一点x, 使$\|x-f(x)\|$不超过函数的固定的不连续测量, 这一结果推广了Schauder定理和文[1]的结果.

关键词　不连续映射, 近似不动点, 映射的连续化, 映射的不连续测量
分类号　AMS(1991) 47H10/CCL O177.91

§1　引　言

Schauder不动点定理表明Banach空间上的任一紧凸集X上的任一连续自映射至少存在一个不动点, 这一定理因其简明实用而著名.

但在一些情况下, Schauder定理中的连续性假设并不满足, 因缺少这一条件而使定理不再成立. 但它也不是完全错误, 这主要指下列事实: 映射的小的跳跃导致的不连续能保证映射有"近似不动点". 这一问题的讨论有其理论和实际意义. 在文[1]中J. C. Ludig和I. Diner在R^n中讨论了不连续映射的不动点定理, 得到了重要结论, 同时把所得结果应用到了实际问题上. 本文在Banach空间上讨论了这一问题, 所得结果推广了著名的Schauder定理和文[1]的结果.

§2　主要结果

设E是Banach空间, X是E中的紧凸子集, $f: X\to X$是任一映射, 定义f在X上的两个不连续测量为:

$$\delta(f)=\sup_{x\in X}\ \overline{\lim_{\epsilon\to 0^+}}\ \sup_{z\in B_\epsilon(x)\cap X}\|f(x)-f(z)\|,$$

$$\delta'(f)=\sup_{x\in X}\ \overline{\lim_{\epsilon\to 0^+}}\ \sup_{y,z\in \mathring{B}_\epsilon(x)\cap X}\|f(y)-f(z)\|.$$

这里$B_\epsilon(x)$代表E中以x为中心, 以ϵ为半径的闭球, $\mathring{B}_\epsilon(x)$代表E中以x为中心, ϵ为半径的去心闭球.

用定义易得下列结果:

---

* 1994年4月18日收到
** 作者现学习单位: 中国科学院系统科学研究所

命题 1　(1)　$\delta(f)=0 \Leftrightarrow f: X \to X$ 连续

(2)　$\delta'(f) \leq 2 \cdot \delta(f)$.

本文得到的主要结果是:

定理　设 E 是Banach 空间, X 是 E 中的紧凸子集, $f: X \to X$ 是任一映射, 则:

(1)　存在 $x^* \in X$, $\| x^* - f(x^*) \| \leq \delta(f)$;

(2)　任给 $\epsilon > 0$, 存在 $x' \in X$, 使得 $\| x' - f(x') \| \leq \delta'(f) + \epsilon$

注 1　当 f 连续时, 由命题 1 知 $\delta(f)=0$, 定理(1)中的 x^* 便是 x 的不动点, 因此该定理包含 Schauder 定理为特例

注 2　取 $E = R^n$, 便得文[1]中主要定理

§3　主要结果的证明

为证主要定理, 引入下列引理:

引理 1 (Fan-Kakutani)[2]　设 K 是局部凸线性拓扑空间 G 的紧凸子集, $F: K \to 2^K$ 是非空闭凸值上半连续映射, 则存在 $x_0 \in K$, 使得 $x_0 \in F(x_0)$.

F 在 K 上的上半连续及 K 紧时上半连续的等价定义见[2].

下面的几个引理给出了 f 的"连续化映射"的定义及性质

引理 2　设 X 是Banach 空间 E 中的紧凸子集, $f: X \to X$ 为任一给定的映射, 定义 f 的"连续化映射" $H_f: X \to 2^X$ 是点到集的映射:

$$H_f(x) = \{y \in X, \text{存在}\{x_n\} \subseteq X, x_n \to x \text{ 且对任一 } n \in N, x_n \neq x, y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\},$$

这里 N 代表自然数集 则 $H_f: X \to 2^X$ 是非空闭值上半连续映射

为证这一引理, 给出一个一般性的引理

引理 3　设 (M, d) 是任一给定的度量空间, $f: M \to M$ 是任一给定的映射; 设 M 中点列 $\{x_{nm}, n \in N, m \in N\}$ 满足下列条件:

(1)　任一固定 $n \in N$, $x_{nm} \to x_n$, $f(x_{nm}) \to y_n$;

(2)　(1)中得到的点列 $\{x_n\}$ 合下列条件: 对任一 $n \in N$, $x_n \neq x_0$, 且 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, 则 $\{x_{nm}\}$ 中存在子列 $\{z_k\}$, 使 $\{z_k\}$ 合下列条件:

1° 任给 $k \in N$, $z_k \neq x_0$, $z_k \to x_0$;

2° $f(z_k) \to y_0$.

证明　利用假设(2), 对任一 $k \in N$, 存在唯一最小的 $a(k) \in N$, 使得当 $i \geq a(k)$ 时:

$$\| y_i - y_0 \| < 1/k, \qquad \| x_i - x_0 \| < 1/k.$$

利用假设(1), 对于给定的 $i, k \in N$, 存在唯一最小自然数 $B(i, k)$, 使得当 $j \geq B(i, k)$ 时, $\| y_i - f(x_{ij}) \| < 1/k$, 且 $\| x_i - x_{ij} \| < 1/k$, 对于任一给定的 $k \in N$, 定义 $b(k) = \min\{m \in N, m \geq B[a(k), k], x_{a(k)m} \neq x_0\}$, 因为 $\lim_{j\to\infty} x_{a(k)j} = x_{a(k)} \neq x_0$, 因此 $b(k)$ 已定义好, 定义 $z_k = x_{a(k)b(k)}$, 则 $\{z_k\}$ 合乎要求;

(1)　$\| z_k - x_0 \| \leq \| z_k - x_{a(k)} \| + \| x_{a(k)} - x_0 \| \leq 2/k$, 且对任一 $k \in N$, $z_k \neq x_0$, 且 $z_k \to x_0 (k \to \infty)$.

(2) $\| y_0 - f(z_k) \| \leq \| y_0 - y_{a(k)} \| + \| y_{a(k)} - f(x_{a(k)b(k)}) \| \leq 2/k$, 因此, $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = y_0$. 证毕.

引理 2 的证明　利用 X 是紧集, 为证 H_f 的上半连续性, 仅证 H_f 在 X 上的闭性即可. 设 $\{x_n\} \in X$, 且 $x_n \to x_0$, $\{y_n\}$ 满足 $y_n \in H_f(x_n)\ (\forall n)$ 且 $y_n \to y_0$.

下证, $y_0 \in H_f(x_0)$. 利用定义可证明: 对任一给定的 $x \in X$, $H_f(x)$ 是 X 的非空闭集; 不失一般性可设对任一 $n \in N$, $x_n \neq x_0$, 利用 H_f 的定义, 对任一给定的 $n \in N$, 存在 $\{x_{nm}\} \subseteq X$, $x_{nm} \to x_n (m \to \infty)$, $f(x_{nm}) \to y_n (m \to \infty)$, 且对任一 $m \in N$, $x_{nm} \neq x_n$. 这样点列 $\{x_{nm}\}$ 满足引理 3 的条件, $\{x_{nm}\}$ 中存在子列 $\{z_k\}$, $z_k \to x_0$, 且对任一 $k \in N$, $z_k \neq x_0$, $f(z_k) \to y_0 (k \to \infty)$. 利用 H_f 的定义知: $y_0 \in H_f(x_0)$. □

为了应用 Fan-Kakutani 定理, 引入映射的"闭凸值连续化映照", 并给出它的性质.

引理 4　设 X, f 如引理 2, 定义 f 的"闭凸值连续化映照" F 如下: 任一 $x \in X$,

$$F(x) = \overline{\mathrm{conv}} H_f(x),$$

它是包含 $H_f(x)$ 的最小闭凸子集, 则: $F: X \to 2^X$ 为非空闭凸值上半连续映照.

为证此引理, 给出一个更一般的结论.

引理 5　设 X, Y 是 Hausdroff 局部凸线性拓扑空间, $F: X \to 2^Y$ 是紧值上半连续映照, 则:

$$\hat{F}: X \to 2^Y, \text{任一 } x \in X, \hat{F}(x) = \overline{\mathrm{conv}} F(x)$$

是紧凸值上半连续映照.

证明　直接用定义即可.

引理 4 显然是引理 5 的推论.

有了上述准备工作, 有:

引理 6　设 X, f 如引理 2 所要求, 则存在 $x^* \in X$, 使得: $x^* \in F(x^*)$.

证明　结合引理 4, 1 即得.

为了证明主要定理, 给出下列的

引理 7　设 X, f 如引理 2 所要求, 则:

(1) $\delta(f) = \max_{x \in X} \sup_{z \in F(x)} \| f(x) - z \|$;

(2) $\delta'(f) = \max_{x \in X} d(H_f(x))$, 这里 $d(A)$ 代表集合 A 的直径.

证明略.

主要定理的证明　由引理 6 知存在 $x^* \in X$, $x^* \in F(x^*)$, 结合引理 7 得:

(1) $\| x^* - f(x^*) \| \leq \sup_{x \in F(x^*)} \| F(x^*) - x \| \leq \delta(f)$.

(2) 任给 $\epsilon > 0$, 在 $H_f(x^*)$ 中取一点 q, 则由引理 7 的 (2) 知:

$$\| x^* - q \| \leq \delta'(f).$$

利用 q 的定义, 存在 $x_n \to x^*$, $f(x_n) \to q$ 知存在 $x' \in X$ 使:

$$\| f(x') - q \| < \epsilon/2, \quad \| x' - x^* \| < \epsilon/2,$$

这样:

$$\| x' - f(x') \| \leq \| x' - x^* \| + \| x^* - q \| + \| q - f(x') \| < \delta'(f) + \epsilon$$

参 考 文 献

[1] J. C. Ludig and Immo Diener, *Fixed Point Theorems for Discontinuous Mapping*, Programming, 51 (1991), 257- 267.

[2] B. Holmes Richard, *Geometric Functional Analysis and Its Applications*, Springer-Verlag, New York Inc., 1975.

Fixed Point Theorems for Discontinuous Mapping in Banach Spaces

Mao Erwan

(Dept. of Math., Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016)

Abstract

In this paper, we prove a generalization of Schauder's fixed point theorem for discontinuous maps. The main result shows that for discontinuous functions on a compact convex domain X of a Banach spaces E, one can always find a point $x \in X$ such that $\|x - f(x)\|$ is less than a certain measure of discontinuity. This result is a generalization of Schauder's theorem and [1].

Keywords discontinuous mappings, approximate fixed points, measure of discontinuity of a functions, the continufication of the discontinuous functions