第 17 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 2
1997 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

Adams 完备化与局部化的等价性*

沈文淮 易建新 丁鹏 代雄平
(华南师范大学数学系, 广州 510631) (中山大学岭南学院)

摘 要 本文在一般的范畴上考虑了幂等对与 Adams 完备化的关系, 证明了它们是等价的.

关键词 幂等对, Adams 完备化, 正交偶
分类号 AMS(1991) 55P60/CCL O189.23

设 $\mathbf{C}$ 为范畴, $E: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 为函子, $\eta: I\to E$ 为自然变换. 若偶对 (E, η) 满足下述公理:

公理 I 对 $\mathbf{C}$ 中的任一对象 X, 有 $\eta_{EX} = E\eta_X$;

公理 II η_{EX} 为 EX 到 E^2X 的等价, 则称 (E, η) 为幂等对, E 为局部化函子.

设 S 为范畴 $\mathbf{C}$ 中的态簇, $\mathbf{C}(S^{-1})$ 为关于 S 的分数范畴, Y 为 $\mathbf{C}$ 中的某个对象. 考虑反变函子 $\mathbf{C}(S^{-1})(\bullet, Y): \mathbf{C}\to E_{ns}$ (集合范畴), 若存在 $\mathbf{C}$ 中的对象 Z 及自然等价

$$\tau: \mathbf{C}(S^{-1})(\bullet, Y)\approx \mathbf{C}(\bullet, Z),$$

则称 Z 为 Y 的 S-完备化. 若 $\mathbf{C}$ 中的每个对象都有 S-完备化, 则称 $\mathbf{C}$ 上存在整体 S-完备化或 Adams 完备化.

局部化与 Adams 完备化理论是同伦论中的重要工具. 迄今, 围绕幂等对与 Adams 完备化已发表了不少论文, 但对于幂等对与 Adams 完备化之间的关系, 却始终未见文章论及. 本文研究了它们之间的联系, 证明了幂等对与 Adams 完备化是等价的, 即证明了下述两个定理.

定理 A 设 (E, η) 为范畴 $\mathbf{C}$ 上的幂等对, 则对 $\mathbf{C}$ 中的任一对象 X, EX 为 X 的 S_E-完备化, 即 $\mathbf{C}$ 上存在整体的 S_E-完备化.

定理 B 设 S 为范畴 $\mathbf{C}$ 中的态簇, 若 $\mathbf{C}$ 上存在整体的 S-完备化, 则存在幂等对 (E, η), 使得 $S_E = \overline{S} = S^{\perp\perp}, D_E = \mathbf{C}_S = S^{\perp}$.

这里 $S_E = \{f: X\to Y\in\mathbf{C} \mid E(f): EX\to EY \text{ 为等价}\}, D_E = \{X\in\mathbf{C} \mid \eta_X: X\to EX \text{ 为等价}\}$.

本文未加说明的概念见于所列的参考文献.

1 定理 A 的证明

设 S 为 $\mathbf{C}$ 中的态簇, 关于 S 的分数范畴 $\mathbf{C}(S^{-1})$ 称为左分数范畴, 若 $\mathbf{C}(S^{-1})$ 及标准函子 $F_S: \mathbf{C}\to\mathbf{C}(S^{-1})$ 满足下述条件

* 1994 年 4 月 18 日收到. 国家自然科学基金资助项目.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(i)　S 包含所有的恒等态且关于复合运算封闭;

(ii)　$\mathbf{C}(S^{-1})$ 中的每个态均可表示成 $F_s(s)^{-1}F_s(f)$ 的形式, 这里 $s\in S$, f 为 $\mathbf{C}$ 中的态;

(iii)　若 $f, g: X\to Y$ 为 $\mathbf{C}$ 中的态, 使得 $F_s(f) = F_s(g)$, 则存在态 $s: Y\to Z$ 属于 S, 满足 $sf = sg$.

态簇 S 称为具有左分数运算, 若 S 除满足上面的条件(i) 外, 还满足下述条件

(ii)　对 $\mathbf{C}$ 中的图表 $X_2\xrightarrow{s}X_1\xrightarrow{f}X_3$, $s\in S$, 存在右面的交换图表且其中的 $t\in S$;

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_3 \\ s\downarrow & & \downarrow t \\ X_2 & \xrightarrow[g]{} & X_4 \end{array}$$

(iii)　对图表 $X_1\xrightarrow{s}X_2\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}X_3$, 其中 $s\in S$ 且 $fs = gs$, 存在 $t: X_3\to X_4$ 使得 $t\in S$ 且 $tf = tg$.

由[4, 定理 14.1] 可知, 若关于态簇 S 的左分数范畴存在, 则 S 具有左分数运算; 反之, 有下述

引理 1[4, p104]　若 S 具有左分数运算, 且对 $\mathbf{C}$ 中的任一对象 X, 存在一集合 $\{s_i: X\to X_i \mid s_i\in S\}$, 使得对任一 $s: X\to Y$ 属于 S, 存在某个 i 及态 $f: Y\to X_i$, 满足右交换图表, 则关于 S 的左分数范畴存在, 从而 $\mathbf{C}(S^{-1})$ 存在

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_i} & X_i \\ & {}_{s}\searrow & \uparrow f \\ & & Y \end{array}$$

定理 A 的证明　若 (E, η) 为 $\mathbf{C}$ 上的幂等对, 由[1] 及引理 1 可知, S_E 具有左分数运算且 $\mathbf{C}(S^{-1})$ 存在. 又由[3, 命题 1.1] 可知 S_E 是饱和态簇. 从而由[3, 定理 1.2] 及[1, 引理 3.2] 可知, 对 $\mathbf{C}$ 中的任一对象 X, EX 为 X 的 S_E- 完备化. □

设 $\mathbf{C}_s$ 为范畴 $\mathbf{C}$ 中所有 S- 完备化对象构成的簇, 由定理 A 及完备化的定义易推出下述命题

命题 2　若 (E, η) 为 $\mathbf{C}$ 上的幂等对, 则 $\mathbf{C}_s = D_E$.

2　定理 B 的证明

先证明几个引理. 首先, 引理 3 是显然的.

引理 3　(a) 设 S 为 $\mathbf{C}$ 中的态簇, $e: Y\to Z\in\mathbf{C}$, 若 $e\in S$ 且关于 S 是上万有的, 即任给 $s: Y\to Z'\in S$, 存在唯一的态 $g: Z'\to Z$ 满足右交换图表, 则由 $ue = e$ 可推出 $u = 1_Z$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{e} & Z \\ & {}_{s}\searrow & \uparrow g \\ & & Z' \end{array}$$

(b)　设 D 为 $\mathbf{C}$ 中的对象簇, $e: Y\to Z\in\mathbf{C}$, 若 $Z\in D$ 且 e 关于 D 是万有的, 即任给 $s: Y\to Z'$, $Z'\in D$, 存在唯一的 $h: Z\to Z'$ 满足右交换图表, 则由 $ve = e$ 可推出 $v = 1_Z$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{e} & Z \\ & {}_{s}\searrow & \downarrow h \\ & & Z' \end{array}$$

命题 4　设 $E: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 为函子, $\eta: I\to E$ 为自然变换, 则下述条件是等价的:

(1)　(E, η) 为幂等对.

(2)　任给 $\mathbf{C}$ 中的对象 X, $\eta_X: X\to EX\in S_E$ 且关于 S_E 具有上万有性.

(3)　任给 $\mathbf{C}$ 中的对象 X, $EX\in D_E$ 且 $\eta_X: X\to EX$ 关于 D_E 具有万有性.

证明　(1)⇒(2), (1)⇒(3) 为[1, 引理 3.2] 的直接推论.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

(2)⇒(1) 由 $\eta_X: X\to EX$ 的上万有性, 存在唯一的 $v: E^2X\to EX$ 满足下面的交换图表(左). 由引理 3(a) 得 $v\circ\eta_{EX}=1$. 又由下面的交换图表(右)及引理 3(a), 可知 $\eta_{EX}\circ v=1$. 因而 η_{EX} 为等价.

$$
(1)\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_{EX}\bullet\eta_X"'] & EX \\
 & E^2X \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}
\qquad
(2)\quad
\begin{tikzcd}
EX \arrow[r, "\eta_{EX}"] \arrow[dr, "\eta_{EX}"'] & E^2X \\
 & E^2X \arrow[u, "\eta_{EX}\circ v"']
\end{tikzcd}
$$

由 $\eta: I\to E$ 的自然性, 有下面右交换图表. 因 η_{EX} 为等价, 故再次利用引理 3(a), 立即得 $E\eta_X=\eta_{EX}$.

(3)⇒(1) 同理可证.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\eta_X"'] & EX \arrow[d, "\eta_{EX}"] \\
EX \arrow[r, "E\eta_X"'] & E^2X
\end{tikzcd}
$$

设 S 为范畴 $\mathbf{C}$ 中的任一态簇, $\mathbf{C}(S^{-1})$ 为关于 S 的分数范畴, $F_S: \mathbf{C}\to\mathbf{C}(S^{-1})$ 为标准函子. 记 $\overline{S}=\{f: X\to Y\in\mathbf{C}\mid F_S(f): F_S(X)\to F_S(Y)$ 为等价$\}$. $\overline{S}$ 称为 S 的饱和化. 又设 $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ 为两个范畴, $F: \mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ 为一函子, 称 F 是态单的, 若对 $\mathbf{C}$ 中任意两个对象 X, Y, 映射 $F(X,Y): \mathbf{C}(X,Y)\to\mathbf{C}'(F(X),F(Y)): F(X,Y)(f)=F(f)$ 为单射; 称 F 是态满的, 若 $F(X,Y)$ 为满射.

引理 5 若 $F_S: \mathbf{C}\to\mathbf{C}(S^{-1})$ 有一右伴随函子 G_S, 则 $\overline{S}=S_{G_SF_S}$.

证明 由[3, 命题 2.3], G_S 为一态单、态满的函子, 从而易证 $\overline{S}=S_{G_SF_S}$.

由分数范畴的定义, 下面的引理是显然的.

引理 6 若 F 为范畴 $\mathbf{C}$ 到范畴 $\mathbf{D}$ 上的反变函子, 使得任给 $s\in S$, $F(s)$ 为 $\mathbf{D}$ 中的等价. 则存在反变函子 $G: \mathbf{C}(S^{-1})\to\mathbf{D}$, 使得 $G\circ F_S=F$.

定理 B 的证明 若 $\mathbf{C}$ 上存在整体 S-完备化, 则由[3, 推论 2.3]可知, F_S 有一右伴随函子 G_S. 再由[3, 命题 2.4 与 2.5], 有单位 $e: I\to G_S\circ F_S$ 属于 $\overline{S}$ 且关于 $\overline{S}$ 是上万有的. 故由命题 4, $(G_S\circ F_S, e)$ 为 $\mathbf{C}$ 上的幂等对. 令 $E=G_S\circ F_S$, $\eta=e$, 则由引理 5, 有 $S_E=\overline{S}$, 从而 $D_E=\overline{S}^{\perp}$.

下面证明 $\overline{S}=S^{\perp\perp}$.

首先, 因 $S\subset\overline{S}$, 故 $S^{\perp}\supset\overline{S}^{\perp}$, 从而 $S^{\perp\perp}\subset\overline{S}^{\perp\perp}$, 注意 $\overline{S}=S_E$, 故 $\overline{S}^{\perp\perp}=S_E^{\perp\perp}=S_E=\overline{S}$, 所以 $S^{\perp\perp}\subset\overline{S}$.

其次, 给定 $f: X_1\to X_2\in\overline{S}$, 任给 $X\in S^{\perp}$, 要证 f 与 X 正交, 即 $f^*=\mathbf{C}(f,X): \mathbf{C}(X_2,X)\to\mathbf{C}(X_1,X)$ 为双射. 考虑反变函子 $\mathbf{C}(\bullet,X): \mathbf{C}\to Ens$, 因任给 $s\in S$, s 与 X 正交, 即 $\mathbf{C}(s,X)$ 为 Ens 中的等价. 故由引理 6, 存在反变函子 $G: \mathbf{C}(S^{-1})\to Ens$, 满足右面交换图表. 因而任给 $f\in\overline{S}$, 由 $F_S(f)$ 为 $\mathbf{C}(S^{-1})$ 的等价立即得出 $f^*=G\circ F_S(f)$ 为 Ens 中的等价, 即双射. 所以 f 与 X 正交. 由 X 的任意性可知 $\overline{S}\subset S^{\perp\perp}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "F_S"] \arrow[dr, "\mathbf{C}(\bullet,X)"'] & & \mathbf{C}(S^{-1}) \arrow[dl, "G"] \\
 & Ens &
\end{tikzcd}
$$

最后, 由 $\overline{S}=S^{\perp\perp}$ 立即得 $D_E=\overline{S}^{\perp}=S^{\perp\perp\perp}=S^{\perp}$, 结合命题 2, $D_E=\mathbf{C}_S=S^{\perp}$. □

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

[1] J. F. Adams, *Idempotent Functors in Homotopy Theory*, Proc. Geometry Conf., Tokyo, Spring, 1973, 247-253.

[2] C. Casacuberta, G. Peschke and M. Pefenniger, *On orthogonal pairs in categories and localization*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., 175(1992), 211-223.

[3] A. Deleanu, A. Frei and P. Hilton, *Generalized Adams completion*, Cahiers de Topologie et Geometrie Différentielle, 15(1974), 61-82.

[4] N. Popescu and L. Popescu, *Theory of Categories*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1979.

The Equivalence of the Idempotent Monad and the Adams Completions

Shen Wenhuai Yi Jianxin Ding Peng
(Math. Dept., South China Normal University, Guangzhou 510631)

Dai Xiongping
(Zhongshan University)

Abstract

In this paper, we consider the relationship of the idempotent monad and the Adams completions in a general category, and verify that they are equivalent.

Keywords idempotent monad, adams completion, orthogonal pair.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.