第 17 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 2
1997 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

非紧集上的变分不等式与拟变分不等式*

张 从 军
(淮北煤炭师范学院数学系, 安徽 235000)

摘 要 本文在非常一般的框架和较弱的条件下证明了一类变分不等式与拟变分不等式解的存在性, 将[1- 7]的结果作了推广并改进在非紧集上讨论

关键词 变分不等式, 拟变分不等式, $\eta(E, F)$-拓扑.
分类号 AMS(1991) 49R20/CCL O176.3

§1 预备知识

对非空集 X, 以 2^X 表 X 的所有非空子集族 设 M, N 是拓扑空间, $X\subset M$, $Y\subset N$, $G: X\to 2^Y$ 是集值映射, 称 $\{(x, y)\in X\times Y: y\in G(x)\}$ 为 G 的图象, 记为 graph(G), 若 graph(G) 是 $X\times Y$ 中的闭集, 称 G 有闭图象

设 Φ 是实或复数域, E, F 是 Φ 上的向量空间, $\langle,\rangle: F\times E\to\Phi$ 是双线性泛函, 对 E 的非空子集 B, co(B) 表 B 的凸包 记

$$U(B, \epsilon) = \{y\in F: \sup_{x\in B}|\langle y, x\rangle| < \epsilon\},\quad \epsilon > 0.$$

当 E 是拓扑向量空间时, 以集族

$$\{U(B, \epsilon): B \text{ 是 } E \text{ 的非空有界子集}, \epsilon > 0\}$$

作零邻域系的基所生成的拓扑记为 $\eta(F, E)$. 以下均设 F 是按 $\eta(F, E)$-拓扑的局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间

引理 1[8] 设 E 是局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间, $X\subset E$ 是非空凸集, $D\subset X$ 是非空紧集 $T: X\to 2^D$ 满足: $\forall x\in X$, co$T(x)\subset D$; $\forall y\in X$, $T^{-1}(y)$ 是 X 中的开集 则必存在 $\bar{x}\in X$, 使 $\bar{x}\in$ co$T(\bar{x})$.

引理 2[9] 设 E, X, D 同引理 1, $T: X\to 2^D$ 是具闭凸值的上半连续映射, 则 T 有不动点

引理 3 设 E 是 Φ 上的拓扑向量空间, X 是 E 的非空有界子集, $T: X\to 2^F$ 是具紧值的上半连续映射 $\langle,\rangle: F\times E\to\Phi$ 满足: 对 $\forall f\in F$, $x\to\langle f, x\rangle$ 在 E 上连续 对 $\forall y\in E$, 令

$$g_y(x) = \inf_{w\in T(x)} \mathrm{Re}\langle w, x - y\rangle,\quad x\in X,$$

则 $g_y: X\to R$ 是下半连续的

注 1 引理 3 的结论较[3, 引理 2]更强, 这里 g_y 不是仅在 X 的紧子集中下半连续, 而是在 X 中下半连续, 这对处理非紧集情形要方便得多.

* 1993 年 3 月 7 日收到 煤炭部青年科学基金资助课题

§2　主要结果

定理 1　设 E 是 Φ 上局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间, X 是 E 的有界凸子集, $D\subset X$ 是非空紧集, $\langle ,\rangle: F\times E\to\Phi$, 对 $\forall f\in F$, $x\to\langle f, x\rangle$ 在 X 上连续. 又设

(1)　$h: X\to R$ 是下半连续的凸泛函;

(2)　$T: X\to 2^F$ 是具紧值的上半连续映射;

(3)　对每个 $x\in X\setminus D$,

$$\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)\leq 0,\quad\forall y\in X,\tag{*}$$

则存在一点 $\bar{x}\in X$, 使

$$\inf_{w\in T(\bar{x})}\mathrm{Re}\langle w, \bar{x}-x\rangle\leq h(x)-h(\bar{x}),\quad\forall x\in X.$$

如果 $T(\bar{x})$ 还是凸集, 则存在 $\bar{w}\in T(\bar{x})$ 使

$$\mathrm{Re}\langle\bar{w}, \bar{x}-x\rangle\leq h(x)-h(\bar{x}),\quad\forall x\in X.$$

注 2　定理 1 推广了[4, 5]中的相应结果到 X 是非紧集情形, 且在更一般的框架之下.

定理 2　设 $E, X, D, \langle ,\rangle, h, T$ 均同定理 1, $(*)$ 式改为:

(1)　$S: X\to 2^X$ 上半连续且对 $\forall x\in X$, $S(x)$ 是 D 的非空闭凸子集;

(2)　对每个 $z\in X$, $x\in X\setminus S(z)$ 有

$$\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle\leq h(x)-h(y),\quad\forall y\in X,$$

$$\sup_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle< h(x)-h(y),\quad\forall y\in X,$$

则存在 $\bar{y}\in X$, 使 $\bar{y}\in S(\bar{y})$ 且

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\leq h(x)-h(\bar{y}),\quad\forall x\in X.$$

定理 3　设 $E, \langle ,\rangle, h, T$ 均同定理 1, X 为 E 的非空凸子集, $(*)$ 式改为: $S: X\to 2^X$ 具非空紧凸值且上半连续, 则存在 $\bar{y}\in X$, $\bar{y}\in S(\bar{y})$ 使

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\leq h(x)-h(\bar{y}),\quad\forall x\in S(\bar{y}).$$

如果 $T(\bar{y})$ 还是凸集, 则存在 $\bar{w}\in T(\bar{y})$ 使

$$\mathrm{Re}\langle\bar{w}, \bar{y}-x\rangle\leq h(x)-h(\bar{y}),\quad\forall x\in S(\bar{y}).$$

注 3　定理 3 在非紧设置下推广改进了[6, 7]. 事实上, 取 $F=E^*$ (E 的共轭空间), $\eta(F, E)$ 拓扑为 E^* 中的强拓扑, $\langle ,\rangle: F\times E\to\Phi$ 为 E 和 E^* 间的配对, $h(x)\equiv 0$, $\forall x\in X$, 由定理 3 即得[6, 7]中的主要结果. 此外, 这里不要求 $S: X\to 2^X$ 下半连续, $\Sigma=\{y\in X: \sup_{x\in S(y)}\inf_{z\in T(y)}\mathrm{Re}\langle z, y-x\rangle>0\}$ 是 X 中的开集这些条件.

§3　主要结果的证明

1　引理 3 的证明

设 $x_0\in X$, $\forall\epsilon>0$, 下证存在 x_0 的开邻域 $N(x_0)$, 当 $x\in N(x_0)$ 时, $g_y(x)\geq g_y(x_0)-\epsilon$.

取 $V=\{f\in F: \sup_{t\in X-y}|\langle f, t\rangle|<\frac{\epsilon}{3}\}$, 这里 $X-y=\{x-y: x\in X\}$. 因为 $X-y$ 是 E 的有界子集, 所以 V 是 F 中的开零邻域, 从而对 $\forall y\in T(x_0)$, $y+V$ 是 y 的开邻域. 故 $T(x_0)+$

$V = \bigcup_{y \in T(x_0)} (y + V)$ 是 $T(x_0)$ 的开邻域 由 T 在 x_0 上半连续, 在 X 中存在 x_0 的开邻域 N_0, 对 $\forall x \in N_0$, 有 $T(x) \subset T(x_0) + V$.

对 $\forall u \in T(x_0)$, 记

$$V_u = \{f \in F: \sup_{t \in \Omega} \left|\langle f, t\rangle - \langle u, t\rangle\right| < \frac{\epsilon}{3}\},$$

其中 $\Omega = \{x - z: x, z \in X\}$ 是 E 中的有界集, 从而 V_u 是 F 中 u 的开邻域 又因为 $T(x_0)$ 是紧集, $T(x_0) \subset \bigcup_{u \in T(x_0)} V_u$, 所以存在 $T(x_0)$ 的有限子集 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, 使 $T(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{u_i}$, 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 因为 $u_i: x \to \langle u_i, x\rangle$ 连续, 故在 X 中存在 x_0 的开邻域 N_i, 使对 $\forall x \in N_i$, 有

$$\left|\langle u_i, x\rangle - \langle u_i, x_0\rangle\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

令 $N(x_0) = \bigcap_{i=0}^{n} N_i$, 则 $N(x_0)$ 是 X 中 x_0 的开邻域

对 $\forall x \in N(x_0)$, $w \in T(x)$, 因 $x \in N_0$, 故存在 $u \in T(x_0)$, 使 $w - u \in V$. 又因为 $u \in T(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{u_i}$, 所以存在 i_0, $i_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使 $u \in V_{u_{i_0}}$ 因此, 有

$$\left|\mathrm{Re}\langle w, x - y\rangle - \mathrm{Re}\langle u, x - y\rangle\right| \le \left|\langle w - u, x - y\rangle\right| < \frac{\epsilon}{3},$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle w, x - y\rangle &> \mathrm{Re}\langle u, x - y\rangle - \frac{\epsilon}{3} = \mathrm{Re}\langle u, x_0 - y\rangle + \mathrm{Re}\langle u, x - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{3} \\
&= \mathrm{Re}\langle u, x_0 - y\rangle + \mathrm{Re}\langle u - u_{i_0}, x - x_0\rangle + \mathrm{Re}\langle u_{i_0}, x - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{3} \\
&> \mathrm{Re}\langle u, x_0 - y\rangle - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} \\
&\ge \inf_{V \in T(x_0)} \mathrm{Re}\langle V, x_0 - y\rangle - \epsilon = g_y(x_0) - \epsilon
\end{aligned}$$

因为 $w \in T(x)$ 是任意的, 所以

$$\inf_{w \in T(x)} \mathrm{Re}\langle w, x - y\rangle \ge g_y(x_0) - \epsilon,$$

即 $g_y(x) \ge g_y(x_0) - \epsilon$

2　定理 1 的证明

假定对每个 $x \in X$, 存在 $x_0 \in X$, 使

$$\inf_{w \in T(x)} \mathrm{Re}\langle w, x - x_0\rangle > h(x_0) - h(x),$$

由(*)式知, $x_0 \in D$ 且以下两点成立:

1° 定义 $P: X \to 2^D$, $\forall x \in X$

$$P(x) = \{y \in D: \inf_{w \in T(x)} \mathrm{Re}\langle w, x - y\rangle + h(x) - h(y) > 0\},$$

则易验证对每个 $x \in X$, $P(x) \subset D$ 非空且是凸集

2° 对每个 $y \in D$, $P^{-1}(y)$ 是 X 中的开集

事实上, 设 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in P}$ 是 $X \setminus P^{-1}(y)$ 中的网, 且 $x_\alpha \to x_0 \in X$, 则

$$\inf_{w \in T(x_\alpha)} \mathrm{Re}\langle w, x_\alpha - y\rangle + h(x_\alpha) - h(y) \le 0, \quad \forall \alpha \in \Gamma.$$

由引理 3, $x \to \inf_{w \in T(x)} \mathrm{Re}\langle w, x - y\rangle$ 下半连续, $h: X \to R$ 也已知下半连续, 故有

$$\inf_{w\in T(x_0)}\mathrm{Re}\langle w, x_0 - y\rangle + h(x_0) - h(y) \leq 0.$$

因此, $X \setminus P^{-1}(y)$ 是 X 中的闭集, 从而 $P^{-1}(y)$ 是 X 中的开集.

由引理 1, 存在一点 $\overline{x_0}\in X$, 使 $\overline{x_0}\in P(\overline{x_0})$, 从而 $\overline{x_0}\in D$ 且

$$\inf_{w\in T(\overline{x_0})}\mathrm{Re}\langle w, \overline{x_0} - \overline{x}\rangle + h(\overline{x_0}) - h(\overline{x_0}) > 0,$$

这是一个矛盾. 于是存在 $\overline{x}\in X$, 使

$$\inf_{w\in T(\overline{x})}\mathrm{Re}\langle w, \overline{x} - x\rangle \leq h(x) - h(\overline{x}), \quad \forall x\in X.$$

再证定理 1 的后一部分.

首先可以验证对每个固定的 $x\in X$, $f\to\mathrm{Re}\langle f, x\rangle$ 在 F 上连续.

事实上, 对 $\forall f_0\in F$, $\forall \epsilon > 0$, 由 X 是 E 中非空有界子集知

$$U(X, \epsilon) = \{y\in F: \sup_{x\in X}|\langle y, x\rangle| < \epsilon\}$$

是 F 中的一个开零邻域, 从而

$$V = f_0 + U(X, \epsilon) = \{f\in F: \sup_{x\in X}|\langle f - f_0, x\rangle| < \epsilon\}$$

是 f_0 的开邻域. 当 $f\in V$ 时有

$$|\mathrm{Re}\langle f, x\rangle - \mathrm{Re}\langle f_0, x\rangle| \leq |\mathrm{Re}\langle f - f_0, x\rangle| \leq |\langle f - f_0, x\rangle| < \epsilon.$$

再定义 $\varphi: X\times T(\overline{x})\to R$ 如下:

$$\varphi(x, w) = \mathrm{Re}\langle w, \overline{x} - x\rangle + h(\overline{x}) - h(x), \quad (x, w)\in X\times T(\overline{x}).$$

则对每个固定的 $x\in X$, $w\to\varphi(x, w)$ 是连续仿射泛函, 对每个固定的 $w\in T(\overline{x})$, $x\to\varphi(x, w)$ 是下半连续的凹泛函, 而 X 是凸集, $T(\overline{x})$ 是紧凸集, 根据 Kneser 极大和极小定理[10], 有

$$\min_{w\in T(\overline{x})}\sup_{x\in X}\varphi(x, w) = \sup_{x\in X}\min_{w\in T(\overline{x})}\varphi(x, w).$$

再由本定理的前一部分结果知

$$\min_{w\in T(\overline{x})}\sup_{x\in X}[\mathrm{Re}\langle w, \overline{x} - x\rangle + h(\overline{x}) - h(x)] \leq 0.$$

因为 $T(\overline{x})$ 是紧集, 故存在 $\overline{w}\in T(\overline{x})$ 使

$$\sup_{x\in X}[\mathrm{Re}\langle \overline{w}, \overline{x} - x\rangle + h(\overline{x}) - h(x)] = \min_{w\in T(\overline{x})}\sup_{x\in X}[\mathrm{Re}\langle w, \overline{x} - x\rangle + h(\overline{x}) - h(x)],$$

因此有

$$\mathrm{Re}\langle \overline{w}, \overline{x} - x\rangle \leq h(x) - h(\overline{x}), \quad \forall x\in X.$$

3 定理 2 的证明

由条件(1), 对每个 $z\in X$, $S(z)$ 是 X 的紧子集. 按定理 1, 存在 $y_0\in X$, 使

$$\inf_{w\in T(y_0)}\mathrm{Re}\langle w, y_0 - x\rangle \leq h(x) - h(y_0), \quad \forall x\in X.$$

再由条件(2)知 $y_0\in S(z)$. 令

$$F(z) = \{y\in S(z): \sup_{x\in X}[\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w, y - x\rangle + h(y) - h(x)] \leq 0\},$$

则 $F: X\to 2^D$ 是集值映射, 且对每个 $z\in X$, $F(z)$ 非空.

由引理 3, 对每个 $x\in X$, $\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w, y - x\rangle + h(y) - h(x)$ 关于 y 下半连续, 再由[10, 命题 1.4.6]知

$$\sup_{x\in X}[\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w, y - x\rangle + h(y) - h(x)]$$

也关于 y 下半连续, 从而 $F(z)\subset S(z)\subset D$ 是闭集, 而 D 是紧集, 所以 $F(z)$ 也是紧集. 再由

$\langle,\rangle: F\times E\to\Phi$ 是双线性的, $h: X\to R$ 是凸泛函, 可知 $F(z)$ 是凸集

令 $H: X\to R$, $\forall y\in X$,

$$H(y)=\sup_{x\in X}\left[\inf_{w\in T(y)}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)\right],$$

则 H 在 X 中下半连续 设 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是

$$\operatorname{graph}(F)=\{(x,y)\in X\times X: y\in F(x)\}$$

中的网, 且 $(x_\alpha, y_\alpha)\to(x_0, y_0)\in X\times X$. 则有, $(x_\alpha, y_\alpha)\in X\times X$, $y_\alpha\in F(x_\alpha)$, 从而 $y_\alpha\in S(x_\alpha)$ 且 $H(y_\alpha)\le 0$. 由于 H 下半连续, 故 $H(y_0)\le 0$, 再由 $S: X\to 2^D$ 上半连续, D 紧, 根据[11, p6, 1.1]知, $y_0\in S(x_0)$, 从而 $y_0\in F(x_0)$ 即 $(x_0, y_0)\in\operatorname{graph}(F)$, 于是 F 有闭图象

再由[12, p111, 推论 9]知, F 在 X 中上半连续 由引理 2, F 在 X 中有不动点 即存在 $\bar{y}\in X$, 使 $\bar{y}\in F(\bar{y})$. 从而有 $\bar{y}\in S(\bar{y})$ 且

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\operatorname{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\le h(x)-h(\bar{y}),\quad \forall x\in X.$$

4 定理 3 的证明

对 $\forall z\in X$, $S(z)\subset X$ 是紧凸集, 由定理 1, 存在 $\bar{y}\in S(z)$, 使

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\operatorname{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)\le 0,\quad \forall x\in S(z).$$

定义 $F: X\to 2^X$ 如下:

$$F(z)=\{y\in S(z): \sup_{x\in S(z)}\left[\inf_{w\in T(y)}\operatorname{Re}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)\right]\le 0\}.$$

类似于定理 2 中的证明, 可知 F 是具非空紧凸值的上半连续映射, 仍由引理 2, F 有不动点 $\bar{y}\in F(\bar{y})$, 从而有 $\bar{y}\in S(\bar{y})$ 且

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\operatorname{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\le h(x)-h(\bar{y}),\quad \forall x\in S(\bar{y}).$$

如果 $T(\bar{y})$ 是凸集, 类似定理 1 中后一部分证明可得, 存在 $\bar{w}\in T(\bar{y})$ 使

$$\operatorname{Re}\langle\bar{w}, \bar{y}-x\rangle\le h(x)-h(\bar{y}),\quad \forall x\in S(\bar{y}).$$

参 考 文 献

[1] F. E. Browder, *A new generalization of the Schauder fixed point theorem*, Math. Ann., 174 (1967), 285-290.

[2] M. H. Shih and K. K. Tan, *Minimax inequalities and applications*, Contemp. Math., 54(1986), 45-63.

[3] M. H. Shih and K. K. Tom, *Generalized bi-quasi-variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl., 143(1989), 66-85.

[4] F. E. Browder, *The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann., 177(1968), 283-301.

[5] P. Hartman and G. Stampacchia, *On some nonlinear elliptic functional differential equations*, Acta Math., 115(1966), 271-310.

[6] M. H. Shih and K. K. Tan, *Generalized quasi-variational inequalities in locally convex topological vector spaces*, J. Math. Anal. Appl., 108(1985), 333-343.

[7] W. K. Kim, *Remark on a generalized quasi-variational inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc., 103: 2(1989), 667-668.

[8] X. P. Ding, W. K. Kim and K. K. Tan, *Equilibrium of noncompact generalized games with L^*-majorized preference correspondences*, J. Math. Anal. Appl., 164(1992), 508-517.
[9] C. J. Himmelberg, *Fixed point of compact multifunctions*, J. Math. Anal. Appl., 38(1972), 205-207.
[10] 张石生著, 变分不等式和相补问题理论及应用, 上海科学文献出版社, 1991.
[11] T. W. Ma, *Topological degree for set-valued compact vector fields in locally convex spaces*, Dissortations Math (Rozprawy Mat), 92(1972), 1-43.
[12] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984, 111.

Variational Inequalities and Quasi-Variational Inequalities for the Noncompact Set

Zhang Congjun
(Dept. of Math., Huaibei Coal Teachers' College, 235000)

Abstract

In this paper, we study the existence problem of solutions for a class of variational inequalities and quasi-variational inequalities under weak hypotheses and in a more general setting. We generalize and improve corresponding results of [1-7] for the noncompact set.

Keywords variational inequality, quasi-variational inequality, $\eta(F, E)$-topology.