关于紧邻域扩充性质的等价条件及其应用*

王 延 庚
(西北大学数学系, 西安710069)

摘 要 本文刻画了紧邻域扩充性质的等价条件, 由此条件得到如果 X 是具有紧邻域扩充性质的可度量化的拓扑空间, 则 $\mathbf{F}_k(X) = \{A \subset X: |A| \le k\}$ 也具有紧邻域扩充性质, 此处 $\mathbf{F}_k(X)$ 上的拓扑是由 Hausdorff 度量所诱导出的拓扑.

关键词 紧邻域扩充性质, 神经, Whitehead 拓扑, Hausdorff 度量
分类号 AMS(1991) 58D15, 57N20/CCL O118

1 定义及刻画定理

本文除特别强调外, 空间均为可分度量空间, 映射均为连续映射, 凡未给出的定义和概念均以[1]和[5]中的为准.

设 X 是一个拓扑空间, 如果对任意空间 Y 及 Y 中任意紧子集 A, 任意映射 $f: A \to X$ 都可以扩充到 A 的某邻域上, 则称 X 具有紧邻域扩充性质. 如果上述定义中的 f 可以扩充到 Y 上, 则称 X 具有紧扩充性质. 关于紧扩充性质和紧邻域扩充性质的有关性质见[6]和[7].

如果空间 X 是绝对邻域收缩核, 则 X 具有紧邻域扩充性质. 反之, 一般情况下是不成立的[4]. 一个 σ 紧的具有紧扩充性质的空间是否为绝对邻域收缩核一直是无限维拓扑学中的公开问题. 因此给出紧扩充及紧邻域扩充性质的各种等价条件就显得很有必要.

本文所需的术语如下: 设 $\mathbf{U}$ 是空间 X 的集族, $\mathrm{mesh}(\mathbf{U}) = \sup_{U \in \mathbf{U}} \mathrm{diam}\, U$, $\mathbf{N}(\mathbf{U})$ 表示 $\mathbf{U}$ 的神经, 它上边的拓扑是 Whitehead 拓扑[1,5]. 设 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的开覆盖列, 如果 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{mesh}(\mathbf{U}_n) = 0$, 则称 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的趋近于零的开覆盖列. 记 $\mathbf{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}_n$, $K \prec \{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 表示 K 是 $\mathbf{N}(\mathbf{U})$ 的子复形, 且满足 $\forall \sigma \in K$, 都存在自然数 n, 使得 $\sigma \in \mathbf{N}(\mathbf{U}_n \cup \mathbf{U}_{n+1})$. K^0 表示 K 的顶点集. 设 A 是 X 的子集, $f: K^0 \to A$, 如果 $\forall U \in K^0$, $f(U) \in U \cap A$, 则称 f 是一个选择.

刻画定理 设 (X, d) 是度量空间, 则下列条件等价:

1〉 X 具有紧邻域扩充性质;

2〉 对 X 中任意紧子集 A, 存在 X 的趋近于零的开覆盖列 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得对任意 $K \prec \{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$, 及任意选择 $f: K^0 \to A$, 都存在 f 的扩充 $g: K \to X$ 满足条件: $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$, 当 $n(\sigma) = \sup\{n: \sigma \in \mathbf{N}(\mathbf{U}_n \cup \mathbf{U}_{n+1})\} > n_0$ 时, 有 $\mathrm{diam}\, g(\sigma) < \epsilon$;

* 1994年4月11日收到. 陕西省自然科学基金资助课题

3〉 对 X 中任意紧子集 A，存在 X 的趋近于零的开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对任意 $K \prec \{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$，及任意选择 $f: K^0 \to A$，都存在映射 $g: K \to X$ 满足条件：$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N$，当 $n(\sigma) > n_0$ 时，有 $\delta(\sigma) = \sup\{d(g(x), f(U)): x \in \sigma, U \in \sigma^0\} < \epsilon$

二　刻画定理的证明

引理 1　设 A 是 X 中的闭子集，$\mathcal{V}$ 是 X 的开覆盖，$\mathcal{W}$ 是 A 的开覆盖，且 $\mathcal{W}$ 加细

$$\mathcal{V} \cap A = \{V \cap A : V \in \mathcal{V}\}.$$

则对任意 $\epsilon > 0$，存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$，满足如下条件：

1〉 $\mathrm{mesh}(\mathcal{U}) < \epsilon$;

2〉 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的加细，且 $\mathcal{U} \cap A$ 是 $\mathcal{W}$ 的加细；

3〉 如果 $\{U_1, \cdots, U_p\} \subset \mathcal{U}$，满足条件 $\bigcap_{i=1}^{p} U_i \neq \varnothing$ 且对任意 $i \leq p$，有 $U_i \cap A \neq \varnothing$，则

$$A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} U_i\right) \neq \varnothing.$$

证明　取 $\mathcal{W}$ 的开加细 $\mathcal{U}'$，使得 $\mathrm{mesh}(\mathcal{U}') < \epsilon/4$. 对 $U' \in \mathcal{U}'$，取 $V \in \mathcal{V}$，使得 $U' \subset V$. 记 $\mathrm{Ext}U' = \{x \in X : d(x, U') < d(x, A \setminus U')\}$，$\Phi(U') = \{x \in V \cap \mathrm{Ext}U' : d(x, U') < \epsilon/4\}$. 对 $x \in X \setminus A$，取 x 的开邻域 U_x 满足条件：$U_x \cap A = \varnothing$，$\mathrm{diam}U_x < \epsilon/2$，且 U_x 含在 $\mathcal{V}$ 的某个元素之中. 定义 $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X \setminus A\} \cup \{\Phi(U') : U' \in \mathcal{U}'\}$，则 $\mathcal{U}$ 满足引理 1 所需的条件.

引理 2　设 A 是空间 (Y, ρ) 中的闭子集，$\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是子空间 A 的开覆盖列，则存在 A 在 Y 中的开邻域序列 $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $W_1 \setminus A$ 的局部有限的开覆盖 $\mathcal{V}$，满足下列条件：

1〉 $\rho(x, A) < 1/n, \forall x \in W_n$;

2〉 $\overline{W}_{n+1} \subset W_n$;

3〉 如果 $V \in \mathcal{V}, V \cap \overline{W}_n \neq \varnothing$，则 $V \subset W_{n-1}$，且存在 $\Phi(V) \in \mathcal{U}_n$，使得 $V \subset \mathrm{Ext}\Phi(V)$，同时对 V 中任意一点 x，都存在 $y \in \Phi(V)$，使得 $\rho(x, y) < 2\rho(x, A)$;

4〉 A 的边界点的每个邻域含有无限个 $\mathcal{V}$ 中的元素；

5〉 $\rho(A, V) > 0, \forall V \in \mathcal{V}$;

6〉 $\forall a \in A$，及 a 在 Y 中的邻域 W，都存在 a 在 Y 中的邻域 U，使得对 $\mathcal{V}$ 中的元素 V，如果 $V \cap U \neq \varnothing$，则 $V \subset W$.

证明　可由[1]中第四章的引理 4.2, 4.3, 4.4 和 4.5 推出.

刻画定理的证明:

1〉⇒2〉的证明：令 $j: A \to Q$ 是嵌入映射，此处 Q 表示 Hilbert 方体 $[0, 1]^{\infty}$. 由于 X 具有紧邻域扩充性质，故存在 $j(A)$ 的开邻域 V，及映射 $\S: V \to X$，满足条件 $\S \circ j = id$.

将归纳的定义 X 的开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$，使其满足如下条件：

$1〉_n$ $\mathrm{mesh}(\mathcal{U}_n) < 2^{-n}$;

$2〉_n$ $\mathcal{U}_n$ 是 $\mathcal{U}_{n-1}$ 的加细；

$3〉_n$ 如果 $\{U_1, \cdots, U_p\} \subset \mathcal{U}_n$，满足① $\bigcap_{j=1}^{p} U_i \neq \varnothing$，②$\forall i \leq p, U_i \cap A \neq \varnothing$，则 $A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} U_i\right) \neq \varnothing$;

4〉$_n$ 存在 $\S^{-1}(\mathbf{U}_{n-1})$ 的开加细 $\mathbf{W}_n$, 此处 $\mathbf{W}_n$ 是由线性凸集构成, 使得 $\mathbf{U}_n \cap A$ 是 $j^{-1}(\mathbf{W}_n)$ 的重心加细

令 $\mathbf{U}_0$ 是 X 的一个开覆盖, $\mathrm{mesh}(\mathbf{U}_0) < 1$, 且满足归纳条件 3〉. 假设 $\mathbf{U}_{n-1}$ 已定义, 由于 $\S^{-1}(\mathbf{U}_{n-1})$ 是 V 的开覆盖, 故存在 $\S^{-1}(\mathbf{U}_{n-1})$ 开加细 $\mathbf{W}_n$, 此处 $\mathbf{W}_n$ 是由 Q 中的线性凸子集构成 令 $\mathbf{W}_n^*$ 是 $\mathbf{W}_n$ 的重心加细, 则 $j^{-1}(\mathbf{W}_n^*)$ 是 A 的开覆盖且加细 $\mathbf{U}_{n-1} \cap A$. 由引理 1 知存在 X 的开覆盖 $\mathbf{U}_n$, 满足如下条件:

1〉 $\mathrm{mesh}(\mathbf{U}_n) < 2^{-n}$;

2〉 $\mathbf{U}_n$ 是 $\mathbf{U}_{n-1}$ 的加细, $\mathbf{U}_n \cap A$ 是 $j^{-1}(\mathbf{W}_n^*)$ 的加细;

3〉 如果 $\{U_1, \cdots, U_p\} \subset \mathbf{U}_n$, 且满足 $\bigcap_{i=1}^{p} U_i \neq \varnothing$ 和 $\forall i \leq p, U_i \cap A \neq \varnothing$, 则 $A \cap (\bigcap_{i=1}^{p} U_i) \neq \varnothing$. 由 2〉知 $\mathbf{U}_n \cap A$ 是 $j^{-1}(\mathbf{W}_n)$ 的重心加细 如此构造的 $\mathbf{U}_n$ 满足所有的归纳条件.

可以验证 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足刻画定理中 2〉所需的全部条件.

2〉⇒3〉是显然成立的

3〉⇒1〉的证明: 设 A 是空间 (Y, ρ) 的紧子集, $f: A \to X$ 是连续映射. 由于 $f(A)$ 是 X 的紧子集, 因此由 3〉知存在 X 的趋近于零的开覆盖列 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 3〉中所给的条件. 由引理 2 知对 A 的开覆盖列 $\{f^{-1}(\mathbf{U}_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 存在 A 的开邻域列 $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及 $W_1 \setminus A$ 的局部有限开覆盖 $\mathbf{V}$ 满足引理 2 所述的条件.

为完成 3〉⇒1〉的证明, 需证明 f 可以扩充到 W_1 上. 由于存在标准映射 $c: W_1 \to W_1^* = A \cup \mathbf{N}(\mathbf{V})$, 这里 $c|_A = id$, W_1^* 上的拓扑定义见[1]或[2], 因此只要证明 f 可以扩充到 W_1^* 上就可以了.

$\forall V \in \mathbf{V}$, 固定一点 $x_V \in V$, 定义 $n(V) = \sup\{n: V \cap \overline{W}_n \neq \varnothing\}$. 由引理 2 的条件知存在 $\varphi(V) \in f^{-1}(\mathbf{V}_{n(V)})$, 及 $a_V \in \varphi(V)$, 使得 $V \subset \mathrm{Ext}\varphi(V)$, $d(x_V, a_V) < 2d(x_V, A)$. 由于 $\varphi(V) \in f^{-1}(\mathbf{U}_{n(V)})$, 故存在一个 $U(V) \in \mathbf{U}_{n(V)}$, 使得 $\varphi(V) = f^{-1}(U(V))$.

定义 $K^0 = \{U(V): V \in \mathbf{V}\}$, $\sigma = \langle U(V_1), \cdots U(V_p)\rangle \in K$ 当且仅当 $\bigcap_{i=1}^{p} V_i \neq \varnothing$. 下边将说明 $K \prec \{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$. 对任意 $\sigma = \langle U(V_1), \cdots, U(V_p)\rangle \in K$, 由 K 的定义知存在一点 $x \in \bigcap_{i=1}^{p} V_i$, 记 $n(x) = \sup\{n: x \in \overline{W}_n\}$, 从而 $\forall i \leq p$, $n(x) \leq n(V_i) \leq n(x) + 1$, 因此 $\{U(V_i): 1 \leq p\} \subset \mathbf{U}_{n(x)} \cup \mathbf{U}_{n(x)+1}$. 此外, 因为 $V_i \subset \mathrm{Ext}\varphi(V_i)$, 由 $\bigcap_{i=1}^{p} V_i \neq \varnothing$ 知 $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ext}\varphi(V_i) \neq \varnothing$. 从而 $\bigcap_{i=1}^{p} \varphi(V_i) \neq \varnothing$, 更有 $\bigcap_{i=1}^{p} U(V_i) \neq \varnothing$, 因此 $K \prec \{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$. 需要注意的是当 $V_1, V_2 \in \mathbf{V}$, 而 $V_1 \neq V_2$ 时, 有可能 $U(V_1) = U(V_2)$.

设 $U \in K^0$, 记 $L(U) = \{V \in \mathbf{V}: U(V) = U\}$. 因为对任意 $V \in L(U)$, $n(V) \leq k(U) = \sup\{n: U \in \mathbf{U}_n\} < \infty$, 故可定义 $m(L(U)) = \sup\{n(V): V \in L(U)\}$. 取 $V \in L(U)$, 且满足 $n(V) = m(L(U))$. 定义 $h(U) = f(a_V)$, 则 $h: K^0 \to f(A)$ 是一个选择. 据刻画定理中的 3〉, 知存在映射 $g: K \to X$ 满足条件: $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$, 当 $\sigma \in K$ 且 $\cap(\sigma) = \sup\{n: \sigma \in \mathbf{N}(\mathbf{U}_n \cup \mathbf{U}_{n+1})\} \geq n_0$ 时, 有 $\delta(\sigma) = \sup\{d(g(x), h(U)): x \in \sigma, U \in \sigma^0\} < \epsilon$

记 $U_*: \mathbf{N}(\mathbf{V}) \to K$ 是由映射 $U: \mathbf{N}^0(\mathbf{V}) \to K^0$ 所诱导的映射, 定义 $F: W_1^* = A \cup \mathbf{N}(\mathbf{V}) \to X$ 如下:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A \\ g\circ U_*(x), & x\in \mathbf{N}(\mathbf{V}) \end{cases}$$

可以验证 F 是 f 在 W_1^* 上的连续扩充

三　刻画定理的应用

设 X 是度量空间, d 是 X 上的度量, 记 $2^X=\{A\subset X: A$ 是紧子集$\}$, ρ 表示 2^X 上的 Hausdorff 度量, 即对 2^X 中的 A 和 B, $\rho(A,B)=\max\{\max\limits_{a\in A}d(a,B),\max\limits_{b\in B}d(b,A)\}$. $\forall k\in N$, 定义 $\mathbf{F}_k(X)=\{A\in 2^X: |A|\le k\}$, $\mathbf{F}_\infty(X)=\bigcup\limits_{k\in N}\mathbf{F}_k(X)$. Nguyen To Nhu 在[3]中证明了 $\forall k\in N\cup\{\infty\}$, 函子 $\mathbf{F}_k$ 将绝对邻域收缩核映成绝对邻域收缩核 本文将证明 $\mathbf{F}_k$ 将具有紧邻域扩充性质的空间映成具有紧邻域扩充性质的空间, 即

定理3　如果 X 具有紧邻域扩充性质, 则对任意 $k\in N\cup\{\infty\}$, $\mathbf{F}_k(X)$ 也具有紧邻域扩充性质

证明　就 k 为有限的情况下对定理进行证明, k 为无限时, 证明方法类似

设 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{F}_k(X)$ 中的紧子集 通过简单验证知 $\cup\mathbf{A}$ 是 X 中的紧子集 正如证明刻画定理 1〉⇒2〉那样, 对 X 中的紧子集 $\cup\mathbf{A}$, 可以在 X 中构造出趋近于零的开覆盖列 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^\infty$, 满足刻画定理中 2〉的条件

设 $\{U_1,\cdots,U_q\}$ 是 X 中的开集族, 定义 $\mathbf{F}_k(X)$ 中的开集 $S(U_1,\cdots,U_q)$ 为 $\{A\in\mathbf{F}_k(X): A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{q}U_i$ 且 $\forall i\le q$, 有 $A\cap U_i\ne\varnothing\}$. 对 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^\infty$ 而言, 则定义 $\overline{\mathbf{U}_n^k}=\{S(U_1,\cdots,U_q): U_i\in\mathbf{U}_n$ 且 $U_i\ne U_j$ 时, 有 $\mathrm{dist}(U_i,U_j)\ge 4\cdot 2^{-n}\}$. 这里需要注意的是在证明刻画定理 1〉⇒2〉时, 构造出的 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^\infty$ 具有性质 $\mathrm{mesh}(\mathbf{U}_n)<2^{-n}$. 定义 $\mathbf{U}_n^k=\bigcup\limits_{i\ge n}\widetilde{\mathbf{U}}_i^k$, 则 $\{\mathbf{U}_n^k\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathbf{F}_k(X)$ 中趋于零的开覆盖列, 且 $\mathrm{mesh}(\mathbf{U}_n^k)<2^{-n}$.

为证明 $\mathbf{F}_k(X)$ 具有紧邻域扩充性质, 只需证明 $\{\mathbf{U}_n^k\}_{n=1}^\infty$ 对 $\mathbf{F}_k(X)$ 中的紧子集 $\mathbf{A}$ 满足刻画定理中 3〉的条件

设 $K\prec\{\mathbf{U}_n^k\}_{n=1}^\infty$, $f: K^0\to\mathbf{A}$ 是任意给定的选择 $\forall V=S(U_1,\cdots,U_p)\in K^0$, 固定一个集合 $\{a_1(V),\cdots,a_p(V)\}\subset f(V)$, 使得 $\forall i\le p$, 有 $\{a_1(V),\cdots,a_p(V)\}\cap U_i$ 是单点集 记 $g(V)=\{a_1(V),\cdots,a_p(V)\}$, 则 $g(V)\subset U\mathbf{A}$. 此外, 当 $U_i\in\mathbf{U}_n$, $V=S(U_1,\cdots,U_p)\in K^0$ 时, 有 $\rho(g(V),f(V))<2^{-n}$.

设 $\sigma=\langle V_1,\cdots,V_p\rangle\in K$, 这里 $V_i=S(U_1^i,\cdots,U_{ki}^i)$, 记 $A(\sigma)=\{\{a_1,\cdots,a_p\}: \forall i\le p$, 有 $a_i\in g(V_i)\cap U^i, U^i\in\{U_1^i,\cdots,U_{ki}^i\}$ 且 $\bigcap\limits_{i=1}^{p}U^i\ne\varnothing\}$, 可以验证 $|A(\sigma)|\le k$.

定义 g 的扩充 $g: K\to\mathbf{F}_k(X)$ 如下: 设 $\sigma=\langle V_1,\cdots,V_p\rangle\in K$, $x=\sum\limits_{i=1}^{p}t_iV_i\in\sigma$, 则定义 $g(x)=\{\S(\sum\limits_{i=1}^{p}t_ij(a_i)): \{a_1,\cdots,a_p\}\in A(\sigma)\}$, 这里 § 和 j 均为刻画定理 1〉⇒2〉证明中的映射 显然 $g: K\to\mathbf{F}_k(X)$ 是连续的映射 此外, 扩充后的 g 还满足条件: $\rho(g(x),f(V_i))\le\rho(g(x),g(V_i))+\rho(g(V_i),f(V_i))\le 2^{-n(\sigma)+1}+2^{-n(\sigma)+1}=2^{-n(\sigma)+2}$.

通过以上论证知$\{\mathbf{U}_n^k\}_{n=1}^{\infty}$满足刻画定理中3〉的条件,即$\mathbf{F}_k(X)$具有紧邻域扩充性质
作者对导师刘应明教授的指导深表谢意

参　考　文　献

[1] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Detroic, 1965.

[2] J. Dugundgi, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math., 1(1951), 353-367.

[3] Nguyen To Nhu, *Inrestigating the ANR-property of metric spaces*, Fund. Math., 124(1984), 243-254.

[4] J. Van Mill, *Another counter-example in ANR-theory*, Proc. Amer Math. Soc., 97(1986), 136-138.

[5] J. Van Mill, *Infinite-Dimensional Topology: Prereguisites and Introduction*, North Holland, Amsterdam, 1989.

[6] J. van der Bijl and J. van Mill, *Linear spaces, absolute retracts and the compact extension property*, Proc. Amer. Math. Soc., 104(1988), 942-952.

[7] V. Klee, *Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces*, Math. Ann., 141(1960), 281-285.

On a Theorem Characterizing CNEP and an Application

Wang Yangeng

(Dept. of Math., Northwest University, Xi'an 710069)

Abstract

In this paper, We give a equivalent condition on CNEP. Using this theorem, we prove that $\mathbf{F}_k(X) = \{A \subset X; |A| \leq k\}$ has the compact neighborhood extension property if X has the compact neighborhood extension property.

Keywords CNEP, nerve, whitehead topology, Hausdorff metric