第17卷第2期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 2
1997年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

关于扰动m-增生算子值域条件的改进*

马新顺　　石彤菊

(华北电力学院数学教研室, 保定071003)

摘　要　本文证明了扰动m-增生算子的几个值域定理, 改进了文[1]的某些定理的条件.

关键词　m-增生算子, 紧算子, Banach 空间

分类号　AMS(1991) 47B44/CCL O177.2

1　引言及准备

算子值域$R(T+C)$与非线性算子方程$f=Tx+Cx$的可解性密切相关. 关于扰动m-增生算子的值域问题的研究近几年一直是非常活跃的课题. 本文采用不同于文[1]的方法证明了在较弱条件下的几个结果.

设X是实Banach 空间, 其范数及对偶空间分别是$\|\cdot\|$及X^*. 对偶映射$F: X\to 2^{X^*}$定义为: 对每一$x\in X$,

$$F(x)=\{f\in X^*: \langle x, f\rangle=\|x\|^2, \|f\|=\|x\|\},$$

其中$\langle x, f\rangle$表线性泛函f在点x处的取值. F一般多值. 当X^*严格凸时, F单值. 下面我们以$B(0, r)$表中心在零点半径为$r>0$的开球, $\overline{D}$及∂D分别表有界集D的闭包及边界. 对算子T, 以$D(T)$及$R(T)$分别表T的定义域及值域. 以下我们仅涉及单值算子及实Banach 空间的讨论, 当然, 这不影响问题的实质.

一算子$T: D(T)\subset X\to X$称为增生的, 如果对任意$x, y\in D(T)$, 存在$f\in F(x-y)$使得

$$\langle Tx-Ty, f\rangle\geq 0;$$

增生算子T如果对某一$\lambda>0$(从而对所有$\lambda>0$)有$R(T+\lambda I)=X$, 则称T是m-增生的(其中I代表恒等算子); T称为强增生的如果存在$\alpha>0$使得对任意$x, y\in D(T)$, 存在$f\in F(x-y)$满足

$$\langle Tx-Ty, f\rangle\geq\alpha\|x-y\|^2;$$

T称为扩张的, 如果存在$\beta>0$使得对任意$x, y\in D(T)$满足

$$\|Tx-Ty\|\geq\beta\|x-y\|.$$

显然, 强增生算子必是扩张的增生算子. 对m-增生算子T, 用$J_n: X\to D(T)$及$T_n: X\to R(T)$分别表示T的预解式及Yosida 逼近, 即$J_n=(I+\frac{1}{n}T)^{-1}$, $T_n=n(I-J_n)=TJ_n$ $(n=1, 2, \cdots)$. 众

* 1994年6月21日收到

所周知, J_n 是非扩张的, T_n 是Lipschitz 连续的m-增生算子且对每一 $x\in D(T)$ 有: $\lim_{n\to\infty} J_n x = x$, $\|T_n x\| \leq \|T x\|$ $(n=1,2,\cdots)$ (这些结论可参见[2]).

算子 $T: D(T) \subset X \to X$ 称为demi-连续的, 如果 T 在 $D(T)$ 上从 X 的强拓扑到 X 的弱拓扑连续, 即 $x_n \in D(T)$, $x_n \to x$ $(n\to\infty)$ 则有 $T x_n \rightharpoonup T x$ $(n\to\infty)$, (其中"$\to$"及"$\rightharpoonup$"分别表示强、弱收敛); 算子 T 称为紧的如果它连续且映每一有界子集为 X 内的相对紧子集

2　主要结果

定理1　设 X 是实Banach 空间, $T: X\to X$ 是扩张的 m-增生算子, $D\subset X$ 是有界开集且 $0\in D$. 设 $C: \overline{D}\to X$ 是紧算子, 若存在 $r>0$ 使得

$$\langle Tx + Cx, f\rangle \geq r\|x\|, \tag{1}$$

对任意 $x\in\partial D$ 及 $f\in F(x)$, 则 $\overline{B(0,r)}\subset (T+C)\overline{D}$.

证明　设 $z\in\overline{B(0,r)}$. 因 T 是 m-增生的, 对每一自然数 n, 定义紧算子 $G: \overline{D}\to X$

$$Gx = \left(T + \frac{1}{n} I\right)^{-1}(z - Cx).$$

要证明 G 满足Lerag-Schauder 条件: $Gx\neq\lambda x$ 对 $x\in\partial D$ 及 $\lambda>1$. 为此, 设 $Gx=\lambda x$ 对某个 $x\in\partial D$ 及 $\lambda>1$, 即

$$T(\lambda x) + Cx + \frac{1}{n}\lambda x = z. \tag{2}$$

应用 T 的增生性, 可选择一 $f\in F(x)$ 使得

$$\langle T(\lambda x) - Tx, f\rangle \geq 0. \tag{3}$$

以上述 f 乘方程(2)的两端, 并应用(1)、(3)两式

$$\langle z, f\rangle \geq r\|x\| + \frac{1}{n}\lambda\|x\|^2,$$

即 $r\|x\| > r\|x\| + \frac{1}{n}\lambda\|x\|^2$. 这是一个矛盾, 于是 G 满足Lerag-Schauder 条件进而知, G 有不动点 $x_n\in\overline{D}$ (见[3]). 因此, 对每一自然数 n 存在 $x_n\in\overline{D}$ 使得

$$z = Tx_n + Cx_n + \frac{1}{n}x_n.$$

因为 C 是紧算子, 不妨设 $\{Cx_n\}$ 收敛, 所以 $\{Tx_n\}$ 收敛, 进而由 T 的扩张性获得, $\{x_n\}$ 是Cauchy 列, 故 $x_n\to x_0\in\overline{D}$ 且 $Tx_n\to z - Cx_0$ (对某 $x_0\in\overline{D}$). 应用Banach 空间内 m-增生算子的闭性知

$$z = Tx_0 + Cx_0, \text{ 即 } z\in (T+C)\overline{D}.$$

这证明了 $\overline{B(0,r)}\subset (T+C)\overline{D}$.

推论1　设 X^* 一致凸, $T: X\to X$ 是demi-连续的强增生算子, $D\subset X$ 是有界开集且 $0\in D$. 设 $C: \overline{D}\to X$ 是紧算子. 若存在 $r>0$ 使得

$$\langle Tx + Cx, F(x)\rangle \geq r\|x\|,$$

对任意 $x\in\partial D$, 则

$$\overline{B(0,r)}\subset (T+C)\overline{D}.$$

证明　当 X^* 一致凸时, $T: X\to X$ 的demi-连续增生必然蕴含 T 是 m-增生的(见[4]Th9.

14). 且对偶映射单值及强增生蕴含扩张增生 于是, 定理1所有条件被满足, 因此推论1的结论直接由定理1获得

注　推论1与文[1]的推论1相比, 去掉了对 T 的有界性要求 另一方面, 在条件(4)中我们允许 $r=0$, 即此时有 $0\in(T+C)\overline{D}$ 的结论, 这在文[1]中没有考虑 因此, 上面的定理1和推论1改进并推广了文[1]的推论1

以上涉及的 m-增生算子 $T:X\to X$ 具定义域 $D(T)=X$, 这个条件的要求是很强的, 大量的 m-增生算子不具备 因而在应用中不方便, 为此下面考虑较弱条件即 $D(T)\subset X$ 下更一般的结果, 首先证明下面的:

引理1　设 X 是实Banach 空间, $T:D(T)\subset X\to X$ 是 m-增生算子, $C:\overline{D}\to X$ 是紧算子, 其中 D 是 X 内有界集 对任意 $\alpha>0$, 若方程

$$T_nx+Cx+\alpha x=z\quad(n=1,2,\cdots)\tag{5}$$

有解 $x_n\in\overline{D}$(其中 T_n 是 T 的 Yosida 逼近), 则方程

$$Tx+Cx+\alpha x=z\tag{6}$$

也有解 $x\in\overline{D}\cap D(T)$ 且有某子列 $\{x_{n'}\}$ 使得 $x_{n'}\to x\ (n'\to\infty)$.

证明　令 $J_nx_n=u_n\in D(T)$, 即 $x_n=u_n+\frac{1}{n}Tu_n$. 由假设有: $Tu_n+Cx_n+\alpha x_n=z\ (n=1,2,\cdots)$. 因 $\{x_n\}$ 有界, C 紧, 所以 $\{Tu_n\}$ 有界且存在子列 $\{x_{n'}\}$ 使得 $Tu_{n'}+\alpha u_{n'}=z-Cx_{n'}-\frac{\alpha}{n'}Tu_{n'}$ 当 $n'\to\infty$ 时收敛 易知, $T+\alpha I$ 是强增生的, 故 $\{u_{n'}\}$ 是 Cauchy 列, 存在 $x\in\overline{D}\cap\overline{D(T)}$ 使得 $u_{n'}\to x$, $x_{n'}\to x$, 则有 $Tu_{n'}\to z-Cx-\alpha x$. 再由 T 的闭性可知,

$$x\in D(T)\cap\overline{D}\ 且\ Tx+Cx+\alpha x=z.$$

定理2　设 X 是实Banach 空间, $T:D(T)\subset X\to X$ 是 m-增生算子, D 是 X 内有界开集 $O\in D$, 设 $C:\overline{D}\to X$ 是紧算子, 若存在 $r>0$ 使得对每一自然数 n 有

$$\langle T_nx+Cx,f\rangle\geq r\|x\|\tag{7}$$

对任意 $x\in\partial D$ 及 $f\in F(x)$, 则 $B(0,r)\subset\overline{R(T+C)}$. 若 T 还是强增生的, 则 $\overline{B(0,r)}\subset R(T+C)$.

证明　任意 $z\in\overline{B(0,r)}$, 证明对每一 $\alpha>0$, 下面方程

$$Tx+Cx+\alpha x=z\tag{8}$$

有解 $x\in D(T)\cap\overline{D}$.

为此, 先考虑方程

$$T_nx+Cx+\alpha x=z\quad(n=1,2,\cdots)\tag{9}$$

的可解性 因 $T_n:X\to R(T)$ 是 m-增生的, 可定义紧算子 $G:\overline{D}\to X$, $Gx=(T_n+\alpha I)^{-1}(z-Cx)$. 类似于定理1可证明 G 有不动点 $x_n\in\overline{D}$, 即方程(9)有解 由引理1可知(8)有解 设对每一 $\alpha>0$ 方程(8)的解为 $x_\alpha\in D(T)\cap\overline{D}$, 于是令 $\alpha\to 0$

$$\|Tx_\alpha+Cx_\alpha-z\|=\alpha\|x_\alpha\|\to 0,$$

故 $z\in\overline{R(T+C)}$. 这证明了 $B(0,r)\subset\overline{R(T+C)}$. 若 T 还是强增生的, 则对方程(8): $Tx_\alpha+Cx_\alpha+\alpha x_\alpha=z$. 因 C 是紧算子, 可不妨设 $\{Tx_\alpha\}$ 当 $\alpha\to 0$ 时收敛, 因而 $\{x_\alpha\}$ 是 Cauchy 列(用 T 的强增生性), 存在 $x\in\overline{D(T)}\cap\overline{D}$ 使得 $x_\alpha\to x\ (\alpha\to 0)$ 且 $Tx_\alpha\to z-Cx\ (\alpha\to 0)$. 由 T 的闭性知: $x\subset D(T)\cap\overline{D}$ 且 $Tx+Cx=z$. 这证明了 $z\in R(T+C)$ 即证明了 $\overline{B(0,r)}\subset R(T+C)$.

推论2 若 X^* 一致凸, $T: D(T) = X \to X$ 是 demi-连续强增生算子, D 是 X 内有界开子集 $O \in D$. 设算子 $C: \overline{D} \to X$ 紧且存在 $r > 0$ 使得对每一自然数 n

$$\langle T_n x + Cx, F(x) \rangle \geq r \|x\| \tag{10}$$

对任意 $x \in \partial D$, 则 $\overline{B(0, r)} \subset R(T + C)$.

参 考 文 献

[1] 杨光红, 数学研究与评论, 12: 1(1992), 28- 32.

[2] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential in Banach Spaces*, Noordhoff, Legden, Netherlands, 1976.

[3] D. Pascali, *Nonlinear Mapping of Monotone Type*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands, 1978.

[4] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equation of evolution in Banach space*, Proc. Symp. Pure Math., 18(1976).

On the Conditions of Ranges of Perturbed m-Accretive Operators

Ma Xinshun   Shi Tongju

(North China Institute of Electric Power, Baoding 071003)

Abstract

In this paper, we prove some theorems for the ranges of perturbed m-accretive operators, they improve the conditons of some theorems in [1].

Keywords m-accretive operators, compact operators