第17卷第2期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 2
1997年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

广义Laplace-Stieltjes变换的准确零(R)级*

姜 淑 珍
(长春师范学院数学系, 130032)

摘 要 本文对广义Laplace-Stieltjes变换确定的解析函数引进了准确零(R)级的概念, 得到了这样的函数有准确零(R)级的两个充要条件. 其结果类似于指数级数.

关键词 零(R)级, 变换
分类号 AMS(1991) 30D/CCL O174.52

关于指数级数$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-\lambda_ns}$, 余久曼在文[2]中研究了它的准确零(R)级, 得到了$f(s)$有零(R)级的充要条件. 本文把这一结果推广到了广义Laplace-Stieltjes变换上.

设变换

$$F(s)=\int_L e^{-sz}d\alpha(z), \tag{1}$$

其中L是介于角域$-\frac{\pi}{2}+\tau\le\arg z\le\frac{\pi}{2}-\tau(\tau>0)$中的一条可求长曲线, 由一有限点$z_0$延续到无穷远点; $\alpha(z)$是L上的囿变函数, $s=re^{i\varphi}$是复变数. 用L_z表示L上由z_0到z的部分, 在本文中, 假定存在序列$\{\lambda_n\}\subset L$, 满足条件C:

1° $L=\bigcup_{n=1}^{\infty}L_{\lambda_n}$, $\lambda_{n+1}\in L-L_{\lambda_n}$;

2° $\lambda_n=\omega_ne^{i\tau_n}$, ($\tau_n$, ω_n是实数, $0\le\tau_n<2\pi$, $\omega_n>0$);

3° 存在常数C, 使得当n充分大时, 如果$\lambda=\omega e^{i\theta}\in L_{\lambda_{n+1}}-L_{\lambda_n}$, 则$|I_\lambda-I_{\lambda_n}|\le C$, 这里$I_\lambda$表示$L_\lambda$的长度.

引理1[2] 设对于$r>0$, 存在每一点可导的连续函数$K(r)$, 并且$\lim_{r\to\infty}K(r)=K$ $(0<k<+\infty)$, $\lim_{r\to\infty}K'(r)r\log r=0$, 又设$U(r)=r^{k(r)}$, 则

$$\lim_{r\to\infty}[U(ar)/U(r)]=a^k,\ \lim_{r\to\infty}[rU'(r)/U(r)]=K,$$

其中a为任何正数.

引理2[2] 设C为一已知数$(0<C\le\infty)$, $U(r)$的定义同引理1, 任给$\beta>0$及$\gamma>0$ $(0<\beta<C)$, 存在$r>0$, 使得对任何满足条件$\log y''\ge(1+\gamma)\log y'$, $y'>r$的y', y''存在n, 使$y'\le\omega_n\le y''$并且$|a_n|\ge[U(\omega_n)]^{C-\beta}$, 又设

$$\varlimsup_{n\to\infty}[\log^+|a_n|/\log U(\omega_n)]\le C, \tag{2}$$

* 1994年8月16日收到

则存在递增正整数序列$\{n_j\}$，使

$$\lim_{j\to\infty}[\log^+|a_{n_j}|/\log U(\omega_{n_j})]=C,$$
$$\lim_{j\to\infty}[\log\omega_{n_{j+1}}/\log\omega_{n_j}]=1.$$

令

$$M(r,F)=\sup_{\substack{|s|=r\\ \lambda\in L}}\left|\int_\lambda e^{-sz}d\alpha(z)\right|, \tag{3}$$

$$A_n=\sup_{\substack{|s|=r\neq 0\\ \lambda\in L_{\lambda_{n+1}}-L_{\lambda_n}}}\left|\int_{\lambda-L_{\lambda_n}} e^{(\frac{1}{r}-s)z}d\alpha(z)\right|. \tag{4}$$

如果$\overline{\lim_{r\to\infty}}[\log^+M(r,F)/\log U(r)]=\mu$，那么称$F(s)$有准确零(R)级$\mu$. 在这种情况下，可以得到了如下结果:

定理1　设变换(1)满足C及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[n/\log U(\omega_n)]=E<+\infty \tag{5}$$

成立，则

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}[\log^+M(r,F)/\log U(r)]=\mu\Leftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}[\log^+A_n/\log U(\omega_n)]=\mu\quad(0\le\mu\le\infty).$$

证明　令$I_n(\lambda,s)=\int_{\lambda-L_{\lambda_n}}e^{-sz}d\alpha(z)$. 显然$|I_n(\lambda,s)|\le 2M(r,F)$，对任意$n$，当$\lambda\in L_{\lambda_{n+1}}-L_{\lambda_n}$时，由于

$$\left|\int_{\lambda-L_{\lambda_n}}e^{(\frac{1}{r}-s)z}d\alpha(z)\right|=\left|\int_{\lambda-L_{\lambda_n}}e^{\frac{1}{r}z}dI_n(z,s)\right|$$
$$=\left|e^{\frac{1}{r}z}I_n(z,s)\Big|_{\lambda_n}^{\lambda}-\frac{1}{r}\int_{\lambda-L_{\lambda_n}}e^{\frac{1}{r}z}I_n(z,s)dz\right|$$
$$\le\left|e^{\frac{1}{r}\lambda}\right|2M(r,F)+(2M(r,F)/r)\int_{\lambda-L_{\lambda_n}}\left|e^{\frac{1}{r}z}\right||dz|,$$

当n充分大时

$$A_n\le 4C_1M(r,F)e^{\frac{|\lambda_n|+C}{r}}, \tag{6}$$

其中C_1,C是常数，r是任意的正数.

因为$\overline{\lim_{r\to\infty}}[\log^+M(r,F)/\log U(r)]=\mu\,(0<\mu<+\infty)$，所以任给$\epsilon>0$，存在$r_0$，当$r>r_0$时

$$\log^+M(r,F)\le(\mu+\epsilon)\log U(r).$$

当n充分大时，取$r=\omega_n$.

$$\log^+A_n/\log U(\omega_n)\le\left[\log 4C_1+(\mu+\epsilon)\log U(\omega_n)+\frac{|\lambda_n|+C}{\omega_n}\right]/\log U(\omega_n),$$

因此$\overline{\lim_{n\to\infty}}[\log^+A_n/\log U(\omega_n)]\le\mu$.

假设$\overline{\lim_{n\to\infty}}[\log^+A_n/\log U(\omega_n)]<\mu'<\mu$，则当$n$充分大时，$\log^+A_n<\mu'\log U(\omega_n)$，从而存在常数$C_0$，使任意$n$, $A_n<C_0\exp[\mu'\log U(\omega_n)]$.

令$I_m^*(\lambda,s)=\int_{\lambda-L_{\lambda_m}}e^{(\frac{1}{r}-s)z}d\alpha(z)$，显然$|I_m^*|\le A_m$,

$$\left|\int_{\lambda} e^{-sz} d\alpha(z)\right| = \left|\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\lambda_{m+1}-L_{\lambda_m}} e^{-sz} d\alpha(z) + \int_{\lambda-L_{\lambda_n}} e^{-sz} d\alpha(z)\right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n-1}\left|\int_{\lambda_{m+1}-L_{\lambda_m}} e^{-\frac{z}{r}} \cdot e^{(\frac{1}{r}-s)z} d\alpha(z)\right| + \left|\int_{\lambda-L_{\lambda_n}} e^{-\frac{z}{r}} \cdot e^{(\frac{1}{r}-s)z} d\alpha(z)\right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n-1}\left[\left|e^{-\frac{\lambda_{m+1}}{r}} I_m^*(\lambda_{m+1}, s)\right| + \left|\frac{1}{r}\int_{\lambda_{m+1}-L_{\lambda_m}} e^{-\frac{z}{r}} I_m^*(z, s)\, dz\right|\right]$$

$$+ \left|e^{-\frac{\lambda}{r}} I_m^*(\lambda, s)\right| + \left|\frac{1}{r}\int_{\lambda-L_{\lambda_n}} e^{-\frac{z}{r}} I_m^*(z, s)\, dz\right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n-1}\left[A_m e^{-\frac{\omega_{n+1}}{r}\cos\tau_{n+1}} + \frac{1}{r} A_m e^{-\frac{|\lambda'|\cos\tau'}{r}} (I_{\lambda_{m+1}} - I_{\lambda_m})\right]$$

$$+ A_n e^{-\frac{|\lambda|}{r}\cos\tau_\lambda} + \frac{1}{r} A_n e^{-\frac{|\lambda''|}{r}\cos\tau_{\lambda''}} (I_{\lambda_{n+1}} - I_{\lambda_n}),$$

其中 $\lambda'\in L_{\lambda_{m+1}} - L_{\lambda_m}$, $\tau_{\lambda'} = \arg\lambda'$, $\lambda''\in L_\lambda - L_{\lambda_n}$, $\tau_{\lambda''} = \arg\lambda''$. 易证, 当 $r\geq 1$时, 存在常数C_1, C_2使

$$M(r, F) \leq \sum_{n=0}^{\infty} C_1 A_n e^{-\frac{\omega_n - C_2}{r}\cos\tau}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} C_3 e^{(\mu'+\epsilon)\log U(\omega_n) - \frac{\omega_n - C_2}{r}\cos\tau} \cdot e^{-\epsilon\log U(\omega_n)}$$

$$\leq C_3 \sup_{y\geq 0} e^{(\mu'+\epsilon)\log U(y) - \frac{y}{2r}\cos\tau} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon\log U(\omega_n)}.$$

因为$\overline{\lim_{n\to\infty}}[n/\log U(\omega_n)] = E < +\infty$, 所以, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在N, 当 $n > N$ 时,

$$n < (E+\epsilon)\log U(\omega_n),$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\epsilon}{E+\epsilon}}$收敛, 得知$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon\log U(\omega_n)}$ 收敛, 取 $y = \frac{2r}{\cos\tau} k(\mu'+\epsilon)(1+o(1))$, $(y\to+\infty)$, 由引理1, 并结合以上不等式, 有:

$$M(r, F) \leq C\exp\{(\mu'+\epsilon)[\log U(r) + \log(\frac{2K}{\cos\tau})^k (\mu'+\epsilon)^k \cdot (1+o(1))^k]$$

$$- K(\mu'+\epsilon)(1+o(1))\} A(\epsilon),$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}[\log^+ M(r, F)/\log U(r)] \leq \mu'+\epsilon < \mu$$

这与题设矛盾, 所以$\overline{\lim_{r\to\infty}}[\log^+ A_n|\log U(\omega_n) = \mu$ 类似可证充分性

定理2 设对变换(1), C 及(5)成立, 则$\overline{\lim_{r\to\infty}}[\log^+ M(r, F)/\log U(r)] = \mu$的充分必要条件

i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}[\log^+ A_n/\log U(\omega_n)] = \mu$;

ii) 存在递增正整数序列$\{n_j\}$, 使

$$\lim_{j\to\infty}[\log^+ A_{n_j}/\log U(\omega_{n_j})] = \mu, \lim_{j\to\infty}(\log\omega_{n_{j+1}}/\log\omega_{n_j}) = 1 (0 < \mu \leq +\infty).$$

证明 充分性 当$0 < \mu < +\infty$时, 由 ii), 任给 $\epsilon > 0$ $(\epsilon < \mu)$, 对充分大的 j, $A_{n_j} > [U(\omega_{n_j})]^{\mu-\epsilon}$, 取 r_j, 使 $\omega_{n_j} = r_j k(u-\epsilon)(1+o(1))$ $(j\to\infty)$. 由引理1及(6)得:

$$M(r, F) \geq \frac{1}{4C_1} A_{n_j} e^{-\frac{\omega_{n_j} + C}{r_j}} \geq \frac{1}{4C_1}\exp\{(\mu-\epsilon)\log U(r_j)$$

$$+\log[K^k(u-\epsilon)^k(1+o(1))^k]^{\mu-\epsilon}-K(\mu-\epsilon)(1+o(1))-\frac{C}{r_j}\}.$$

当 $r_j< r< r_{j+1}$时, 显然有

$$1=\lim_{j\to\infty}(\log\omega_{j+1}/\log\omega_j)=\lim_{j\to\infty}(\log r_{j+1}/\log r_j)=\lim_{j\to\infty}(U(r)/\log U(r_j)).$$

由此可得

$$\varliminf_{r\to\infty}[\log^+M(r,F)/\log U(r)]\geq\mu.$$

结合定理1, 当$0<\mu<+\infty$时, 充分性得证.

必要性 定理1中已证 i) 成立, 当$0<\mu<+\infty$时, 假设 ii) 不成立, 由引理2, 存在 $\beta(0<\beta<\frac{\mu}{2})$及 $\gamma>0$, 使对任何 $Y>0$, 存在满足条件

$$\log y_j''\geq(1+\gamma)\log y_j',\ y_j'>Y \text{ 的 } y_j', y_j'', y_j''<y_{j+1}'.$$

使对任何满足 $y_j'\leq\omega_n\leq y_j''$的 n, 有$A_n<[U(\omega_n)]^{\mu-2\beta}$. 于是, 当 $y_j'\leq\omega_n\leq y_j''$时, 仿定理1的证明, 有: 当 n 充分大时,

$$A_ne^{-\frac{\omega_n}{r}\cos\tau}<\exp[(\mu-\beta)\log U(\omega_n)-\frac{\omega_n}{r}\cos\tau]\cdot\exp[-\beta\log U(\omega_n)]$$
$$\leq\exp[(\mu-\beta)\log U(r)+B_1(\beta)]\cdot\exp[-\beta\log U(\omega_n)],$$

其中$B_1(\beta)$是与 β 有关的常数.

由于 i), 任给 $\epsilon>0$, 存在 $Y_0>0$, 对任何 $\omega_n\geq Y_0$, $A_n<\exp[(\mu+\epsilon)\log U(\omega_n)]$, 取 r_j', 使 $(y_j')^{1+\frac{\gamma}{2}}=\frac{r_j'}{\cos\tau}K(\mu+2\epsilon)(1+o(1))$, $(j\to\infty)$, 又取 $\epsilon>0$, 使$[(\mu+2\epsilon)/(1+\frac{\gamma}{2})]<\mu-\eta(0<\eta<\mu)$, 则当 $Y_0\leq\omega_n\leq y_j'$时, (取 j 充分大)

$$A_ne^{-\frac{\omega_n}{r_j'}\cos\tau}\leq\exp\{B_2(\epsilon)+\frac{\mu-\eta}{1+\frac{\gamma}{2}}\log[U(r_j)^{\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}}]\}\cdot\exp[-\epsilon\log U(\omega_n)].$$

因此, 存在 $C_1>1$, 对任何 n 只要 $\omega_n<y_j'$, 就有

$$A_ne^{-\frac{\omega_n}{r_j'}\cos\tau}\leq C_1\exp\{B_2(\epsilon)+\frac{\mu-\eta}{1+\frac{\gamma}{2}}\log[U(r_j)^{\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}}]\}\cdot\exp[-\epsilon\log U(\omega_n)],$$

其中$B_2(\epsilon)$是与 ϵ 有关的常数, 当 $\omega_n\geq y_j''$时, 取 $Y''=(y_j')^{1+\gamma}<y_j''$, 则

$$A_ne^{-\frac{\omega_n}{r_j'}\cos\tau}<\exp[B_1(\beta)+(\mu-\beta)\log U(r_j')]\cdot\exp[-\beta\log U(\omega_n)].$$

因此,

$$M(r,F)\leq C_0\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-\frac{\omega_n-C_2}{r_j'}\cos\tau}$$
$$=C_0e^{\frac{C_2}{r_j'}\cos\tau}[\sum_{0\leq\omega_n<y_j'}A_ne^{-\frac{\omega_n}{r_j'}\cos\tau}+\sum_{y_j'\leq\omega_n<y_j''}A_ne^{-\frac{\omega_n}{r_j'}\cos\tau}+\sum_{\omega_n>y_j''}A_ne^{-\frac{\omega_n}{r_j'}\cos\tau}]$$
$$<\max\{C_1\exp[B_2(\epsilon)+\frac{\mu-\eta}{1+\frac{\gamma}{2}}\log(U(r_j')^{\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}})],\exp[B_1(\beta)+(\mu-\beta)\log U(r_j')]\}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\exp[-\epsilon\log U(\omega_n)]\cdot C_0e^{\frac{C_2\cos\tau}{r_j'}}.$$

由此即得:

$$\varlimsup_{j\to\infty}[\log^{+}M(r_j',F)/\log U(r_j')]\le\max\{\mu-\eta,\mu-\beta\}<\mu.$$

从而得到与题设矛盾的结果. 于是, 当$0<\mu<+\infty$时充分性得证. 当$\mu=+\infty$时, 不难导出结果.

参 考 文 献

[1] 姜淑珍, 数学杂志, 1(1989), 97—102.

[2] 余久曼, 数学研究与评论, 1(1983), 37—40.

[3] 余家荣, 数学学报, 21(1978), 97—118.

[4] 余家荣, 单复变函数论会议上的报告提要, 1979, 昆明.

[5] G. Valiron, *Fonctions entières d'ordre finie et fonctions méromorphes*, Genève, L'Enseignement Mathématique, 1960.

[6] 余家荣, Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之Borel 线, 数学学报, 13(1963).

The Proximate Zero Order (R) of the Generalized Laplace-Stieltjes Transform

Jiang Shuzhen

(Changchun Teacher's College)

Abstract

In this paper, we introduce the proximate zero order (R) of the generalized Laplace-Stieltjes transform and get some results similar to that for exponential series in [2].

Keywords zero order (R), transform.