第17卷第2期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 2
1997年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

具有间隙的动力系统的极限环*

吴 焕 芹
(大连舰艇学院数学教研室, 116013)

李 骊 陈 秀 东
(北京工业大学力学系, 100022) (大连理工大学数学科学研究所, 116024)

摘 要 本文研究了系统 $\ddot{x}+f(\dot{x})+g(x)=0$ 的极限环的存在性, 其中 $g(x)$ 有两个间断点并且不满足 $g(x)\cdot x>0$ $(x\neq 0)$. 还引进[2, 3]中定义的 Филиппов 解的概念, 利用 Филиппов 解的整体存在性和普遍唯一性定理解决方程的解的存在唯一性问题, 得到了几个极限环存在性定理

关键词 Филиппов 解, 状态函数, 特征点, 极限环
分类号 AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

1 引 言

常微分方程的连续系统的极限环问题一直有人研究, 其结果甚多, 而对具有间隙动力系统的极限环问题结果却不多, 尤其是具有不连续动力系统的情形结果更少. 事实上, 在许多实际问题中, 经常会遇到具有的间隙动力系统 如[1]中讨论的方程

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+g(x)=0,$$

其中 $f(\dot{x})=-\alpha\dot{x}+\beta\dot{x}^3$, $\alpha,\beta>0$,

$$g(x)=\begin{cases}\omega^2(x-e), & x>e>0,\\ 0, & |x|\le e,\\ \omega^2(x+e), & x<-e,\end{cases}$$

就是轧钢机的轧辊所服从的运动方程, 这个方程极限环的存在唯一性提供了轧钢机工作的理论依据

文[2, 3]中引进了不连续系统的 Филиппов 解, 并给出了不连续系统 Φ-解的整体存在性和普遍唯一性定理及平面上的比较定理, 为研究不连续系统的极限环在解的存在唯一性方面打下了基础

本文考虑方程

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+g(x)=0, \qquad (*)$$

其中 $f(\dot{x})$ 是 $\dot{x}$ 的连续函数, $g(x)$ 可表为:

* 1994年10月15日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x>e_1>0,\\ g_0(x), & -e_2\le x\le e_1,\\ g_2(x), & x<-e_2<0, \end{cases}$$

其中 $g_0(x)$ 为 $x\in[-e_2,e_1]$ 上的连续函数, $g_1(x)$ 为 $x\in(e_1,+\infty)$ 中的连续、非负、单增函数, $g_2(x)$ 为 $x\in(-\infty,-e_2)$ 中的连续、非正、单增函数

把(*)化成

$$\begin{cases} \dot{x}=-y,\\ \dot{y}=f(-y)+g(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

设 $f(-y)$, $g(x)$ 总是满足[2, 3]中不连续系统的 Φ-解的整体存在性和普遍唯一性定理的条件, 并且 $f(0)=0$, 那么 $\{(x,0)\mid g(x)=0\}$ 为系统的奇点集. 设至少有一个 x 使 $g(x)=0$, 否则系统没有平衡点从而没有极限环. 这里考虑(*)包含所有奇点的极限环存在性问题

交换(1.1)中 x, y 得

$$\begin{cases} \dot{x}=f(-x)+g(y),\\ \dot{y}=-x. \end{cases} \tag{1.2}$$

作 Филиппов 变换 $z=\int_0^{\S}d\S$ 得:

$$\frac{dz}{dy}=-f(-\sqrt{2z})-g(y)\overset{\triangle}{=}F_1(z)-g(y),\quad x\ge 0, \tag{1.3}_1$$

$$\frac{dz}{dy}=-f(\sqrt{2z})-g(y)\overset{\triangle}{=}F_2(z)-g(y),\quad x<0. \tag{1.3}_2$$

因方程有不连续的右端, 引用[2, 3]中定义的 Φ-解, 则以上各方程的 Φ-解整体存在且唯一.

因方程的右端分成三段, 可以研究三个服从不同方程的运动, 并将把下一运动的初始位置与上一运动的最终位置"缝接"起来

2 用特征点的方法研究极限环的存在性

考虑 $-e_2\le y\le e_1$ 时的情形, 方程(1.3)$_i$ 变为

$$\frac{dz}{dy}=F_i(z)-g_0(y)\quad(i=1,2), \tag{2.1}_i$$

引进比较方程

$$\frac{dz}{dy}=F_i(z)-M_0\quad(i=1,2), \tag{2.1}_i'$$

$$\frac{dz}{dy}=F_i(z)-m_0\quad(i=1,2), \tag{2.1}_i''$$

其中 $M_0=\max\limits_{-e_2\le y\le e_1}g_0(y)<+\infty$, $m_0=\min\limits_{-e_2\le y\le e_1}g_0(y)>-\infty$.

设总存在 $z_{i0}>0$, 使得(2.1)$_i$ 过 (z_{i0},e_1) 的积分曲线在 $-e_2\le y\le e_1$ 上整个落在 y 轴右端且与 $y=-e_2$ 相交, 以后均假设这两条积分曲线弧右端存在一个区域, 从这区域出发的(2.1)$_i$, (2.1)$_i'$, (2.1)$_i''$ 的积分曲线均在 y 轴右端与 $y=e_1$ 和 $y=-e_2$ 相交(其实这个要求并不算苛刻),

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由解的存在唯一性知在这些与 $y = e_1$ 和 $y = -e_2$ 相交的积分曲线簇上每个 y 对应唯一一个 z, 分别形式地记过 (z_0, y_0) 的 $(2,1)_i$, $(2,1)_i'$, $(2,1)_i''$ 的积分曲线在 y 处对应的 z 值为 $z_i = z_i(y, z_0, y_0)$, $z_i = z_i'(y, z_0, y_0)$, $z_i = z_i''(y, z_0, y_0)$. 因为

$$F_i(z) - M_0 \leq F_i(z) - g_0(y) \leq F_i(z) - m_0,$$

所以 $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(2,1)_i'} \leq \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(2,1)_i} \leq \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(2,1)_i''}$, 由比较定理得对 $\forall z_0 > 0$ 当 $y \leq y_0$ 时,

$$z_i'(y, z_0, y_0) \geq z_i(y, z_0, y_0) \geq z_i''(y, z_0, y_0).$$

当 $y \geq y_0$ 时, $z_i'(y, z_0, y_0) \leq z_i(y, z_0, y_0) \leq z_i''(y, z_0, y_0)$.

补充定义 $g_1(y)$, $g_2(y)$ 在 $[-e_2, e_1]$ 上等于零, 假定 $g(\pm\infty) = \pm\infty$. 记

$$Q_i(y, p) = py - \int g_i(\S)\, d\S, \quad i = 1, 2$$

因 $\frac{d^2 Q_i(y,p)}{dt^2} \neq 0$, $y \in (-\infty, -e_2) \cup (e_1, +\infty)$, $i = 1, 2$, 对任意给定的 $Q_i(y, p)$ 和 p 在 $(-\infty, +\infty)$ 上至多有两个 y 与其对应, 且若 (z_0, y_0) 满足 $z_0 + c = Q_i(y_0, p)$, 则 $z \leq z_0$ 时有两个 y 满足 $z + c = Q_i(y, p)$, 这样 $z + c = Q_i(y, p)$ 有两支解, 记大的那一支为 $Q_{i+}^{-1}(Q_i(y, p), p)$, 小的那一支为 $Q_{i-}^{-1}(Q_i(y, p), p)$. 为使定理1叙述简便, 对 α_i, β_i $(i = 1, 2)$ 定义如下:

定义1 对 $z_{i1} > z_0$ $(i = 1, 2)$, 记 $m_1 = \min\limits_{0 \leq z \leq z_{11}} F_1(z)$, $M_2 = \max\limits_{0 \leq z \leq z_{21}} F_2(z)$, $a_1 = \min\{m_1, \lim\limits_{y \to -e_2 - 0} g_2(y)\}$, $b_1 = g_2^{-1}(a_1)$, $a_2 = \max\{M_2, \lim\limits_{y \to e_1 + 0} g_1(y)\}$, $b_2 = g_1^{-1}(a_2)$, α_i, β_i $(i = 1, 2)$ 分下面6种情况定义:

(1) 当 $F_1(z_{11}) > \max\{M_0, \lim\limits_{y \to e_1 + 0} g_1(y)\}$ 时, 记 $\overline{z_{11}} = z_1'(-e_2, z_{11}, e_1)$, 定义

$$\alpha_1 = Q_{1+}^{-1}(m_1 g_1^{-1}(F_1(z_{11}))) - \int_{g_1^{-1}(F_1(z_{11}))}^{\overline{z_{11}}} g_1(\S)\, d\S - z_{11}, m_1),$$

$$\beta_1 = Q_{2-}^{-1}(m_1 b_1 - \int_{\overline{z_{11}}}^{z_{11}} g_2(\S)\, d\S - \overline{z_{11}}, m_1);$$

(2) 当 $F_1(z_{11}) \leq M_0$ 时, 记 $\overline{\overline{z}}_{11} = z_{11} - m_1(b_1 + e_2) + \int_{e_2}^{b_1} g_2(\S)\, d\S$, $\overline{z_{11}} = z_1'(e_1, \overline{\overline{z}}_{11} - e_2)$, 定义

$$\alpha_1 = Q_{1+}^{-1}(m_1 e_1 - \overline{z_{11}}, m_1),$$

$$\beta_1 = Q_{2-}^{-1}(m_1 b_1 - \int_{\overline{z_{11}}}^{z_{11}} g_2(\S)\, d\S - z_{11}, m_1);$$

(3) 当 $\lim\limits_{y \to e_1 + 0} g_1(y) > M_0, M_0 < F_1(z_{11}) \leq \lim\limits_{y \to e_1 + 0} g_1(y)$ 时, 记 $\overline{z_{11}} = z_1'(-e_2, z_{11}, e_1)$, 定义

$$\alpha_1 = Q_{1+}^{-1}(m_1 e_1 - z_{11}, m_1),$$

$$\beta_1 = Q_{2-}^{-1}(m_1 b_1 - \int_{\overline{z_{11}}}^{z_{11}} g_2(\S)\, d\S - \overline{z_{11}}, m_1);$$

(4) 当 $F_2(z_{21}) < \min\{m_0, \lim\limits_{y \to -e_2 - 0} g_2(y)\}$ 时, 记 $\overline{z_{21}} = z_2''(e_1, z_{21}, -e_2)$, 定义

$$\alpha_2 = Q_{1+}^{-1}(m_2 b_2 - \int_{\overline{z_{21}}}^{b_2} g_1(\S)\, d\S - \overline{z_{21}}, M_2),$$

$$\beta_2 = Q_{2-}^{-1}(M_2 g_2^{-1}(F_2(z_{21}))) - \int_{g_2^{-1}(F_2(z_{21}))}^{\overline{z_{21}}} g_2(\S)\, d\S - z_{21}, M_2);$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(5) 当$F_2(z_{21}) \geq m_0$, 记$z_{21} = z_{21} - M_2(b_2 - e_1) + \int_{\xi_1}^{b_2} g_1(\xi)d\xi$, $\overline{z_{21}} = z_2''(-e_2, z_{21}, e_1)$, 定义

$$\alpha_2 = Q_{1+}^{-1}(M_2 b_2 - \int_{\xi_1}^{b_2} g_1(\xi)d\xi - z_{21}, M_2),\ \beta_2 = Q_{2-}^{-1}(-M_2 e_2 - \overline{z_{21}}, M_2);$$

(6) 当$m_0 > \lim\limits_{y \to -e_2-0} g_2(y)$, $\lim\limits_{y \to -e_2-0} g_2(y) \leq F_2(z_{21}) < m_0$时, 记$\overline{z_{21}} = z_2''(e_1, z_{21}, -e_2)$, 定义

$$\alpha_2 = Q_{1+}^{-1}(M_2 b_2 - \int_{\xi_1}^{b_2} g_1(\xi)d\xi - \overline{z_{21}}, M_2),\ \beta_2 = Q_{2-}^{-1}(-M_2 e_2 - z_{21}, M_2).$$

定理1 假设

1) $f(\overset{\circ}{x}) \in C^0(-\infty, +\infty)$, $f(0) = 0$, $g(\pm\infty) = \pm\infty$, 且至少有一个x满足$g(x) = 0$, $f(\overset{\circ}{x})$, $g(x)$满足不连续系统 Φ 解的整体存在性和普遍唯一性条件;

2) 存在$z_0 > 0$, 且经过(z_0, e_1)的$\dfrac{dz}{dy} = -g_0(y)$在$[-e_2, e_1]$上的积分曲线整个落在y轴右端, 并在$z \in [0, \max\limits_{-e_2 \leq y \leq e_1} z(y, z_0, e_1)]$($z = z(y, z_0, e_1)$为$\dfrac{dy}{dz} = -g_0(y)$的解)上有: $F_1(z) \leq 0 \leq F_2(z)$, $F_1(z) \not\equiv F_2(z)$;

3) 定义1的α_i, β_i ($i = 1, 2$)满足$\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$, 则系统(*)至少存在一个稳定环.

证明 先做外境界线, 只需证明特征曲线$g(y) = F_1(z)$的过(z_{11}, y_{01})(这里y_{01}对1), 2), 3)三种情况分别对应不同的值)的上特征点的纵坐标不小于α_1, 下特征点的纵坐标不小于β_1. 特征曲线$g(y) = F_2(z)$的过$(z_{21}$, 不大于α_2. 下特征点的纵坐标不大于β_2, 由$\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$即可做成外境界线.

1) $F_1(z_{11}) > \max\{M_0, \lim\limits_{y \to y_{01}+0} g_1(y)\}$, 过$\overline{D}_1(z_{11}, g_1^{-1}(F_1(z_{11})))$做$\dfrac{dz}{dy} = m_1 - g_1(y)$的积分曲线$\Gamma_1$, 则$\Gamma_1$交正$y$轴于$B_1$, 因为

$$\frac{dz}{dy} = m_1 - g_1(y). \qquad (2\ 2)_1''$$

所以$z + C = m_1 y - \int g_1(\xi)d\xi$, 即$z_{11} + C = m_1 g_1^{-1}(F_1(z_{11})) - \int_{g_1^{-1}(F_1(z_{11}))} g_1(\xi)d\xi$. (2 2)$_1''$与正$y$轴交点的纵坐标$y_{\overline{B}_1} = Q_{1+}^{-1}(0 + C, m_1) = \alpha_1$, 由比较定理得过$\overline{D}_1$的(1. 3)$_1$的上特征点的纵坐标不小于$\alpha_1$. 再过$\overline{D}_1$做(2 2)$_1''$的积分曲线交$y = e_1$于$\overline{B}_1$, 过$\overline{B}_1$做(2 1)$_1'$的积分曲线交$y = -e_2$于$\overline{C}_1$, 则$z(\overline{C}_1) \leq z_{11} \leq z_{11}$, 过$\overline{C}_1$的(1. 3)$_1$的积分曲线与负$y$轴的交点的纵坐标不小于过$\overline{E}_1(\overline{z_{11}}, b_1)$的

$$\frac{dz}{dy} = m_1 - g_2(y) \qquad (2\ 2)_2''$$

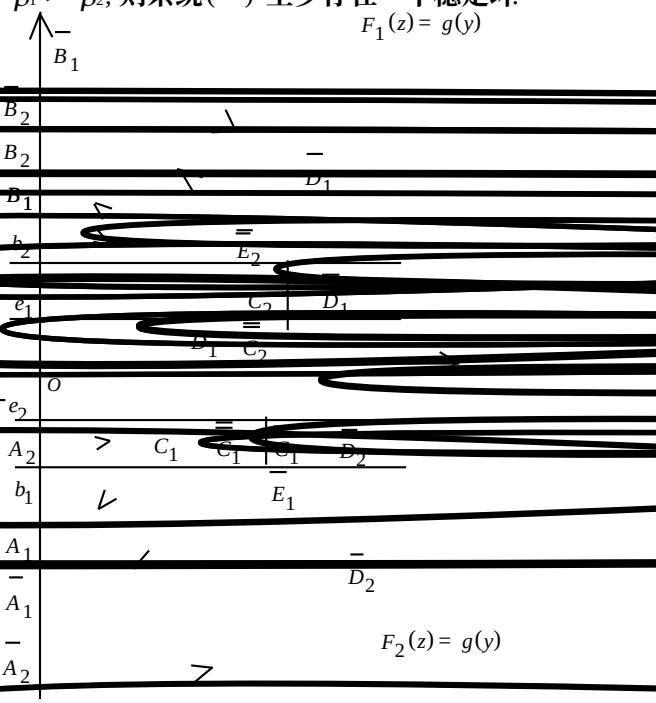

图 1

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

的积分曲线与负 y 轴交点的纵坐标 $y_{\bar{A}_1}$, $y_{\bar{A}_1} = \beta_1$.

2) $F_1(z_{11}) \leq M_0$, 过 $E_1(z_{11}, b_1)$ 做 $(2\ 2)_2''$ 的积分曲线交负 y 轴于 $\bar{A}_1$, 则 $y_{\bar{A}_1} = \beta_1$. 再过 E_1 作 $(2\ 2)_2''$ 的积分曲线交 $y = -e_2$ 于 $\bar{C}_1$, $z(\bar{C}_1) = \bar{\bar{z}}_{11}$, 过 $\bar{C}_1$ 做 $(2\ 1)_1'$ 的积分曲线交 $y = e_1$ 于 $\bar{D}_1$, 则 $z(\bar{D}_1) = \bar{z}_{11}$, 过 $\bar{D}_1$ 做 $(2\ 2)_1''$ 的积分曲线交正 y 轴于 $\bar{B}_1$, $y_{\bar{B}_1} = \alpha_1$, 由比较定理知特征曲线 $g(y) = F_1(z)$ 的过 $E_1(z_{11}, b_1)$ 的上特征点的纵坐标不小于 α_1, 下特征点的纵坐标不小于 β_1.

3) $\lim\limits_{y \to e_1^+ 0} g_1(y) > M_0$ 且 $M_0 < F_1(z_{11}) \leq \lim\limits_{y \to e_1^+ 0} g_1(y)$. 过 $\bar{D}_1(z_{11}, e_1)$ 做 $(2\ 2)_1''$ 的积分曲线交正 y 轴于 $\bar{B}_1$, $y_{\bar{B}_1} = \alpha_1$, 过 $\bar{D}_1$ 做 $(2\ 1)_1'$ 的积分曲线交 $y = -e_2$ 于 $\bar{C}_1$, 则 $z(\bar{C}_1) = \bar{z}_{11} \leq z_{11}$, 过 $\bar{E}_1(\bar{z}_{11}, b_1)$ 做 $(2\ 2)_2''$ 的积分曲线交负 y 轴于 $\bar{A}_1$, 则 $y_{\bar{A}_1} = \beta_1$. 由比较定理和解的存在、唯一性知过 $\bar{D}_1$ 的 $F_1(z) = g(y)$ 的上特征点的纵坐标不小于过 α_1, 下特征点的纵坐标不小于 β_1.

可以对称地得到 $F_2(z) = g(y)$ 的过 (z_{21}, y_{02}) 的上特征点的纵坐标不大于 α_2, 下特征点纵坐标不大于 β_2.

下面作内境界线: 过 $D_1(z_0, e_1)$ 作 $\dfrac{dz}{dy} = -g_0(y)$ 的解交 $y = -e_2$ 于 C_1, 分别过 $D_1(z_0, e_1)$ 做 $(1.\ 3)_i$ 的上半积分曲线交正 y 轴于 B_i, 分别过 C_1 做 $(1.\ 3)_i$ 的下半积分曲线交负 y 轴于 A_i, (这里因为条件(2) 及经过外境界线上的任意一点的(1. 2) 的轨线只能由外部穿到内部), 且 $y_{B_2} > y_{B_1}, y_{A_2} > y_{A_1}$, 回到 (x, y) 平面上闭曲线 $\overrightarrow{A_1A_2D_1B_2B_1D_1A_1}$ 便可作为环域定理的内境界线

3 用状态函数的方法研究极限环的存在性

下面假设 $F_i(z), g(y)$ 除满足引言中假设外还满足: $e_1 = e_2$; $F_1(z) = -F_2(z) \triangleq F(z), z \geq 0$; $F(z), g_i(y), i = 1, 2$, 连续可微; $g(y)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数

考虑方程

$$\frac{dz}{dy} = F(z) - g(y). \qquad (3.\ 1)$$

设 $\lambda_i(z, y) = (F(z) - g_i(y))^2/2$, 则 $\left.\dfrac{d\lambda_i}{dz}\right|_{(3.1)} = (F(z) - g_i(y))\left(F'(z) - g_i'(y)\dfrac{1}{F(z) - g(y)}\right)$, 如存在 $z_1 > z_0, F(z_1) \geq \lim\limits_{y \to e_1^+ 0} g_1(y)$, 且过 (z_1, e_1) 的 (3. 1) 的积分曲线交 $y = -e_2$, 设过 $\bar{D}_1(z_1, g_1^{-1}(F_1(z_1)))$ 的 (3. 1) 的积分曲线交正 y 轴于 $\bar{\bar{B}}_1$, 交 $y = e_1$ 于 $\bar{\bar{D}}_1$, 交 $y = -e_2$ 于 $\bar{\bar{C}}_1$, 然后交负 y 轴于 $\bar{\bar{A}}_1$. 取 $z(\bar{C}_1) \geq z(\bar{\bar{C}}_1)$, 若过 $\bar{C}_1(z(\bar{C}_1), -e_2)$ 的 (3. 1) 的积分曲线交负 y 轴于 $\bar{A}_1$, 则 $y_{\bar{A}_1} \leq y_{\bar{\bar{A}}_1}$, 用 $y = y(z)$ 记 (3. 1) 过 $\bar{D}_1$ 的上半积分曲线, 用 $y = \bar{y}(z)$ 过 $\bar{C}_1$ 的下半积分曲线, 有:

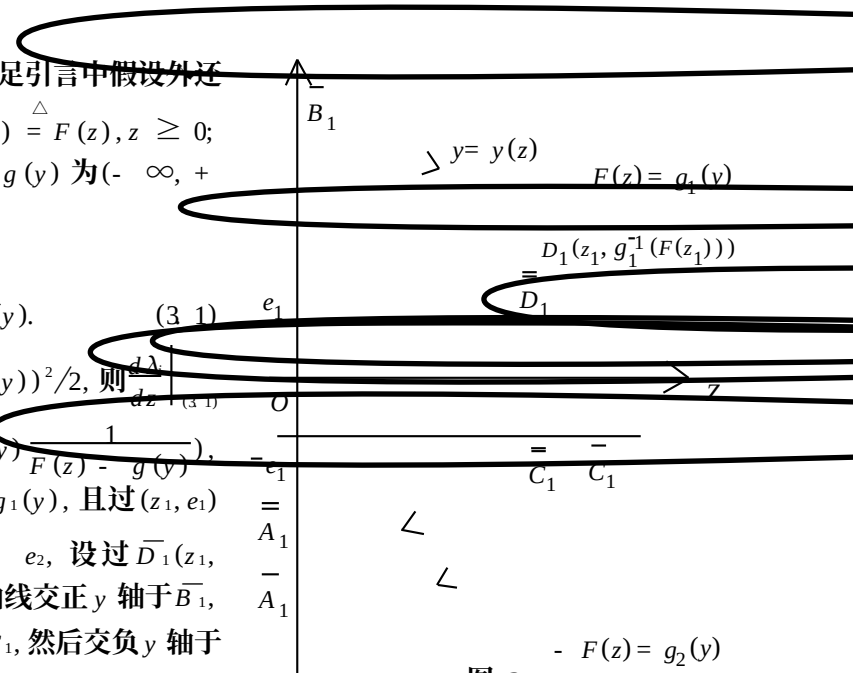

图 2

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\int_{\overline{B}_1}^{z} d\lambda_1 = \int_{1}^{0} [-g_1'(y) + F'(z)(F(z) - g_1(y))]dz = g_1^2(y_{\overline{B}_1})/2,$$

$$\int_{\overline{C}_1}^{z} d\lambda_2 = \int^{(\overline{C}_1)} [-g_2'(\overline{y}) + F'(z)(F(z) - g_2(\overline{y}))]dz$$

$$= [F(z(\overline{C}_1)) - \lim_{y\to -e_1-0} g_2(y)]^2/2 - g_2^2(y_{\overline{A}_1})/2$$

$$\leq [F(z(\overline{C}_1)) - \lim_{y\to -e_1-0} g_2(y)]^2/2 - g_2^2(y_{\overline{\overline{A}}_1})/2,$$

所以 $g_1^2(y_{\overline{B}_1})/2 - g_1^2(y_{\overline{\overline{A}}_1})/2 \geq \int_{\overline{B}_1}^{z} d\lambda_1 + \int_{\overline{C}_1}^{z} d\lambda_2 - \frac{1}{2}[F(z(\overline{C}_1)) - \lim_{y\to -e_1-0} g_2(y)]^2$

定理 2　条件(1), (2) 同定理 1.

(3)　若存在 $z_1 > z_0$, $F(z_1) > \lim_{y\to -e_1-0} g_1(y)$, 且过 $(z_1, g_1^{-1}(F(z_1)))$ 的(3.1) 的积分曲线交 $y = -e_2$, 还存在 $z(\overline{C}_1) \geq z(\overline{\overline{C}}_1)$, 使得

$$\int_{\overline{B}_1}^{z} d\lambda_1 + \int_{\overline{C}_1}^{z} d\lambda_2 - [F(z(\overline{c}_1)) - \lim_{y\to e_1-0} g_2(y)]^2/2 \geq 0,$$

则系统(*) 至少存在一个包含所有奇点的稳定环.

可以对称地讨论 $F(z_1) < \lim_{y\to -e_1-0} g_2(y)$ 的情形.

如果 $\lim_{y\to -e_1-0} g_2(y) \leq F(z_1) \leq \lim_{y\to e_1+0} g_1(y)$, 且过 (z_1, e_1) 的(3.1) 的积分曲线交 $y = -e_2$, 设过 $\overline{D}_1(z_1, e_1)$ 的(3.1) 的积分曲线交 $y = -e_1$ 于 $\overline{\overline{C}}_1$, 交正 y 轴于 $\overline{B}_1$, 交负 y 轴于 $\overline{\overline{A}}_1$, 若存在 $z(\overline{c}_1) \geq z(\overline{\overline{c}}_1)$, 过 $\overline{c}_1(z(\overline{C}_1), -e_1)$ 的(3.1) 的积分曲线交负 y 轴于 $\overline{A}_1$, 则 $y_{\overline{A}_1} \leq y_{\overline{\overline{A}}_1}$.

类似于定理 2 有:

定理 3　条件(1), (2) 同定理 1.

(3)　存在 $z_1 > z_0$, $F(z_1) \in [\lim_{y\to -e_1-0} g_2(y), \lim_{y\to e_1+0} g_1(y)]$, 且过 (z_1, e_1) 的(3.1) 的积分曲线与 $y = -e_1$, 存在 $z(\overline{C}_1) \geq z(\overline{\overline{C}}_1)$, 使 $\int_{\overline{B}_1}^{z} d\lambda_1 + \int_{\overline{C}_1}^{z} d\lambda_2 + [F(z_1) - \lim_{y\to e_1+0} g_1(y)]^2/2 - [F(z(\overline{C}_1)) - \lim_{y\to -e_1-0} g_2(y)]^2/2 \geq 0$, 则系统(*) 至少存在一个稳定环.

4　例　　子

例1　可以验证[1]中讨论的方程满足定理1、定理2的条件.

例2　$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = 0$,

$$g_1(y) = \begin{cases} y^3, & y > 1 \\ \sin 2\pi y, & -2 \leq y \leq 1, \\ y^3, & y < -2, \end{cases}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$$F_1(z)=\begin{cases}-\sin\pi z, & z\le 12,\\ N\cdot\sin(z-1)\pi, & 12\le z\le\dfrac{25}{2},\\ \overline{F_1}(z), & z>\dfrac{25}{2},\end{cases}$$

$$F_2(z)=\begin{cases}\sin\pi z, & z\le 12,\\ -(N+1)\sin(z-1)\pi, & 12\le z\le\dfrac{25}{2},\\ \overline{F_2}(z), & z>\dfrac{25}{2},\end{cases}$$

$\overline{F_i}(z)$是任意的满足解的存在、唯一性条件的函数，$N\in[3,+\infty)$.

容易验证这个方程满足定理1的条件，从而至少有一个稳定环.

参 考 文 献

[1] 李 骊，具有间隙的动力系统的自激振动，科学通报，32: 22(1987)，1751- 1754.

[2] 贺建勋，关于不连续系统解的普遍唯一性定理，数学学报，26: 3(1983).

[3] 贺建勋，不连续的 Филиппов系统解的整体存在性和非整体存在性准则，华中师范学院学报，No. 4，1981.

[4] Chen Xiudong, *Properties of characteristic functions and existence of limit cycles of lienad's equation*, Chin. Ann. of Math., 4B(2), 1983.

[5] Chen Xiudong, *Zero point of state function and limit cycle*, Ann. of Diff. Eqs, 1(2), 1985.

The Limit Cycle of Dynamic System with Gaps

Wu Huanqin

(Dalian Naval Academy, 116018)

Li Li

(Beijing Polytechnic University)

Chen Xiudong

(Dalian University of Technology, 116024)

Abstract

This work is about the existence of the limit cycle of equation

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+g(x)=0,$$

where $g(x)$ has two discontinuous points and does not satisfy $g(x)\cdot x>0, x\neq 0$. We use the concept of Fillipov solution defined in [4, 5] and get several theorems of existence of limit cycle.

Keywords Fillipov solution, state function, characteristic point, limit cycle.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.