第17卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 17 No. 2
1997年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

正交随机测度的极大族的构造和唯一性*

林 一 星
(福建省龙岩师范学校, 364000)

摘 要 本文解决了正交随机测度极大族的构造和极大族的唯一性问题

关键词 正交随机测度, 谱测度, 极大族
分类号 AMS(1991) 46N30, 60G57/CCL O177.3

文[1]指出: 任意可测空间$(G, \mathbf{B})$上的一族两两关系正常的正交随机测度可扩充成一个极大族; 文[2]指出: 极大族的唯一性问题没有解决, 在不唯一的情况下, 选择哪一个极大族作为积分的定义问题, 特别是极大族的构造法, 从而积分的构造性定义, 这三个问题的解决或部分解决, 将是对关于平方可积鞅的随机积分理论的一个推进 本文研究了正交随机测度极大族的构造和极大族的唯一性

定义1[1] 设$\mathbf{B}$是G的某些子集所成的σ-代数, X是Hilbert空间, 映射$F: \mathbf{B}\to X$满足下列两个条件:

(1) 当$A_1, A_2\in\mathbf{B}, A_1\cap A_2=\varnothing$时, $(F(A_1), F(A_2))=0$;

(2) $\{A_n\}\subset\mathbf{B}$是两两不相交的集列, 则$F(\dot{\bigcup\limits_{n=1}}A_n)=\dot{\sum\limits_{n=1}}F(A_n)$, 则称$F$为正交随机测度

设F_1, F_2是两个正交随机测度, 当$A_1, A_2\in\mathbf{B}, A_1\cap A_2=\varnothing$时,

$$(F_1(A_1), F_2(A_2))=0,$$

则称F_1与F_2关系正常

引理2 设F为正交随机测度, 则

(1) 集函数$\langle F\rangle(A)=(F(A), F(A))=\|F(A)\|^2$是可测空间$(G, \mathbf{B})$上的测度;

(2) 当$A_1, A_2\in\mathbf{B}$时, $(F(A_1), F(A_2))=\langle F\rangle(A_1\cap A_2)$;

(3) 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$为两两不相交的可测集, 则$F(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}F(A_i)$.

证明 由定义1直接得到

注 设Δ为两两关系正常的正交随机测度族, 则$SP\Delta$也是两两关系正常的正交随机测度族, 而且$\Delta\subset SP\Delta$ 因此, 不失一般性, 可设Δ为两两关系正常的正交随机测度线性空间

定理3 设Δ为定义在$\mathbf{B}$上取值于X中的两两关系正常的正交随机测度线性空间, 令

---

* 1994年6月9日收到

$$(P_B)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i\cap B),$$

$B, A_i\in\mathbf{B}, \lambda_i\in R, F_i\in\Delta, i=1,2,\cdots,n$, 则 (P_B) 可延拓为由 X 的闭子空间

$$\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B}, F\in\Delta\}]$$

到闭子空间

$$\mathrm{cl}[SP\{F(A\cap B)|A\in\mathbf{B}, F\in\Delta\}]$$

上的投影算子, 而且定义于 $\mathbf{B}$ 上取值于闭子空间 $\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B}, F\in\Delta\}]$ 中的投影算子的集映射 P 是一个谱测度 P 称为由两两关系正常的正交随机测度线性空间 Δ 产生的谱测度

证明 (1) 证明 P_B 是子空间 $SP\{F(A)|A\in\mathbf{B}, F\in\Delta\}$ 到子空间 $SP\{F(A\cap B)|A\in\mathbf{B}, F\in\Delta\}$ 的有界线性算子, 且 $\|P_B\|=1$, $(P_B)(P_B)=P_B$.

易知 P_B 是线性的, 当 $A_1, A_2\in\mathbf{B}, A_1\subset A_2$ 时, $\|F(A_1)\|\leqslant\|F(A_2)\|$ 用数学归纳法易证, 存在有限个两两不相交的可测集 $\{D_j\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i)=\sum_{j=1}^{k}\sigma_j E_j(D_j), \{\sigma_j\}\subset R, \{E_j\}\subset\Delta,$$

则

$$\begin{aligned}\left\|P_B\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i)\right)\right\|^2&=\left\|P_B\left(\sum_{j=1}^{k}\sigma_j E_j(D_j)\right)\right\|^2=\left\|\sum_{j=1}^{k}\sigma_j E_j(D_j\cap B)\right\|^2\\&=\sum_{j=1}^{k}\left(|\sigma_j|\,\|E_j(D_j\cap B)\|\right)^2\leqslant\sum_{j=1}^{k}\left(|\sigma_j|\,\|E_j(D_j)\|\right)^2\\&=\left\|\sum_{j=1}^{k}\sigma_j E_j(D_j)\right\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i)\right\|^2,\end{aligned}$$

因此 $\left\|P_B\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i)\right)\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i)\right\|$, 所以 $\|P_B\|\leqslant 1$.

又因 $P_B\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i\cap B)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i\cap B)$, 于是 $\|P_B\|=1$, 显然 $(P_B)(P_B)=P_B$.

(2) 证当 $x, y\in SP\{F(A)|A\in\mathbf{B}, F\in\Delta\}$ 时,

$$((P_B)x, y)=(x, (P_B)y).$$

设 $A_i, D_j\in\mathbf{B}, \lambda_i, \sigma_j\in R, F_i, E_j\in\Delta, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,k$, 因为

$$\begin{aligned}&\left((P_B)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i)\right), \sum_{j=1}^{k}\sigma_j E_j(D_j)\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i\cap B), \sum_{j=1}^{k}\sigma_j E_j(D_j)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\lambda_i\sigma_j\left(F_i(A_i\cap B), E_j(D_j)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\lambda_i\sigma_j\left(F_i(A_i\cap D_j\cap B), E_j(A_i\cap D_j\cap B)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\lambda_i\sigma_j\left(F_i(A_i), E_j(D_j\cap B)\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(A_i), (P_B)\left(\sum_{j=1}^{k}\sigma_j E_j(D_j)\right)\right).\end{aligned}$$

(3) P_B 的延拓, 成为投影算子

设 $x\in \mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$，则存在 $x_n\in SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=0$，因为

$$\|(PB)x_n-(PB)x_m\|\leqslant\|x_n-x_m\|\to 0,\quad n,m\to\infty,$$

所以 $\{(PB)x_n\}$ 收敛于 $\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$ 中的向量 令

$$(PB)x=\lim_{n\to\infty}(PB)x_n\in\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}],$$

因为 $\|(PB)x\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|(PB)x_n\|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$，于是 (PB) 是 $\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$ 上的有界线性算子.

当 $x,y\in\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$ 时，存在 $x_n,y_n\in SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}$，使 $\|x-x_n\|\to 0$，$\|y-y_n\|\to 0$，因为

$$((PB)x,y)=(\lim_{n\to\infty}(PB)x_n,\lim_{n\to\infty}y_n)=\lim_{n\to\infty}((PB)x_n,y_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(x_n,(PB)y_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n,\lim_{n\to\infty}(PB)y_n)=(x,(PB)y),$$

所以 $(PB)=(PB)^*$.

若 $x\in\mathrm{cl}[SP\{F(A\cap B)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$，取 $x_n\in SP\{F(A\cap B)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}$，使 $\|x-x_n\|\to 0$，则

$$(PB)x=\lim_{n\to\infty}(PB)x_n=\lim_{n\to\infty}x_n=x,$$

因此 $(PB)(PB)=PB$. 于是 PB 是由 $\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$ 到 $\mathrm{cl}[SP\{F(A\cap B)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$ 上的投影算子.

(4) 证集映射 P 是谱测度

显然 $(PG)=I$（恒等算子）.

设 $\{c_j\}\subset\mathbf{B}$ 是两两不相交的，$c=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}c_j$，由 (PB) 的定义知，在 $SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}$ 上有

$$P(\bigcup_{j=1}^{k}c_j)=\sum_{j=1}^{k}(Pc_j).$$

通过极限运算知，在 $\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$ 上也有

$$P(\bigcup_{j=1}^{k}c_j)=\sum_{j=1}^{k}(Pc_j).$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\lambda_iF_i(A_i\cap c)-\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_iF_i(A_i\cap c_j)\|=0$，$i=1,2,\cdots,n$，因此

$$\lim_{k\to\infty}\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_iF_i(A_i\cap c)-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iF_i(A_i\cap c_j)\|=0,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\|(Pc)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iF_i(A_i))-\sum_{j=1}^{k}(Pc_j)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iF_i(A_i))\|=0,$$

所以当 $x_0\in SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\|(Pc)x_0-\sum\limits_{j=1}^{k}(Pc_j)x_0\|=0$.

设 $x\in\mathrm{cl}[SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}]$，则有 $x_n\in SP\{F(A)|A\in\mathbf{B},F\in\Delta\}$，使 $x_n\to x$，任给 $\varepsilon>0$，取 N，使 $\|x-x_N\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，固定 x_N，存在 k_0，当 $k>k_0$ 时，

$$\left\|(Pc)x_N - \sum_{j=1}^{k}(Pc_j)x_N\right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

因此, 当 $k > k_0$ 时,

$$\left\|(Pc)x - \sum_{j=1}^{k}(Pc_j)x\right\|$$

$$\leqslant \left\|(Pc)(x - x_N)\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{k}(Pc_j)(x_N - x)\right\| + \left\|(Pc)x_N - \sum_{j=1}^{k}(Pc_j)x_N\right\|$$

$$\leqslant \left\|x - x_N\right\| + \left\|(P\bigcup_{j=1}^{k}c_j)(x_N - x)\right\| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \left\|x_N - x\right\| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

于是 $Pc = \sum_{j=1}^{\infty}Pc_j$, 故集映射 P 是谱测度 证毕

推论4 设 F 为定义在 $\mathbf{B}$ 上取值于 X 中的正交随机测度, 令

$$(PB)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(A_i \cap B),$$

$B, A_i \in \mathbf{B}$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 则 (PB) 可延拓为由 X 的闭子空间 $\mathrm{cl}[SP\{F(A) \mid A \in \mathbf{B}\}]$ 到闭子空间 $\mathrm{cl}[SP\{F(A \cap B) \mid A \in \mathbf{B}\}]$ 上的投影算子, 而且定义于 $\mathbf{B}$ 上取值于闭子空间 $\mathrm{cl}[SP\{F(A) \mid A \in \mathbf{B}\}]$ 中的投影算子的集映射 P 是一个谱测度 谱测度 P 称为由正交随机测度 F 产生的

定理5 设 Δ 为定义在 $\mathbf{B}$ 上取值于 X 中的两两关系正常的正交随机测度线性空间, 而且 $\mathrm{cl}[SP\{F(A) \mid A \in \mathbf{B}, F \in \Delta\}] = X$, 则包含 Δ 的两两关系正常的正交随机测度极大族是 $\{Px \mid x \in X\}$, 而且极大族是唯一的, 还有 $P(F(G)) = F$, $F \in \Delta$, 其中 P 是 Δ 产生的谱测度, 当 $A \in \mathbf{B}$ 时, $(Px)(A) = P(A)x$.

证明 由文[2]定理1知, $\{Px \mid x \in X\}$ 是两两关系正常的正交随机测度极大族

因为 $F(G) \in X = \mathrm{cl}[SP\{F(A) \mid A \in \mathbf{B}, F \in \Delta\}]$, 从而设 $\left\|F(G) - \sum_{i=1}^{n_k}\lambda_i^{(k)}F_i^{(k)}(A_i^{(k)})\right\| \to 0$, $k \to \infty$, $\{\lambda_i^{(k)}\} \subset R$, $\{A_i^{(k)}\} \subset \mathbf{B}$, $\{F_i^{(k)}\} \subset \Delta$, 因为 $P(A)$ 是投影算子, 所以

$$\sum_{i=1}^{n_k}\lambda_i^{(k)}F_i^{(k)}(A_i^{(k)} \cap A) = (PA)\left(\sum_{i=1}^{n_k}\lambda_i^{(k)}F_i^{(k)}(A_i^{(k)})\right) \to (PA)(F(G)),$$

令 $\check{F}_k(A) = \sum_{i=1}^{n_k}\lambda_i^{(k)}F_i^{(k)}(A_i^{(k)} \cap A)$, $A \in \mathbf{B}$, 则 $\check{F}_k$ 是正交随机测度, 且与 F 关系正常, 从而 $F - \check{F}_k$ 也是正交随机测度, 于是

$$\left\|(F - \check{F}_k)(G)\right\|^2 = \left\|(F - \check{F}_k)(A)\right\|^2 + \left\|(F - \check{F}_k)(G \setminus A)\right\|^2,$$

由前面一个极限式, 得 $\check{F}_k(G) \to F(G)$, 故

$$\check{F}_k(A) \to F(A), \quad k \to \infty,$$

由前面另一个极限式, 又得 $\check{F}_k(A) \to (PA)(F(G))$, 所以 $P(F(G))(A) = (PA)(F(G)) = F(A)$, $A \in \mathbf{B}$, 因此 $P(F(G)) = F$, $F \in \Delta$, 于是 $\{Px \mid x \in X\}$ 是包含 Δ 的两两关系正常的正交随机测度极大族

设 $\overset{0}{F}$ 是与 Δ 中每个正交随机测度关系正常的正交随机测度, 用一样的证法可得 $P(\overset{0}{F}(G)) = \overset{0}{F}$, 因此, $\overset{0}{F} \in \{Px \mid x \in X\}$, 极大族唯一性获证

推 论 6 设 Δ 为两两关系正常的正交随机测度族, 如果 Δ 中有一个 F_0, 满足

$\mathrm{cl}[SP\{F_0(A) \mid A \in \mathbf{B}\}] = X$, 则包含 Δ 的两两关系正常的正交随机测度极大族是 $\{P_0 x \mid x \in X\}$, 而且极大族是唯一的, 还有

$$P_0(F(G)) = F, \quad F \in \Delta,$$

其中 P_0 是 F_0 产生的谱测度, 当 $A \in \mathbf{B}$ 时, $(P_0 x)(A) = P_0(A)x$.

证明 证法与定理5的证法一样.

定理7 $F: \mathbf{B} \to X$ 是正交随机测度, 则 $\mathrm{cl}[SP\{F(A) \mid A \in \mathbf{B}\}] = X$ 的充要条件为: 与 F 关系正常的两个正交随机测度, 一定关系正常.

证明 由定理5和反证法即知.

参 考 文 献

[1] 陈培德, 随机测度论, 数学学报, 19: 3(1976), 210- 216.

[2] 吕播, 谱测度与正交随机测度的关系, 数学学报, 22: 5(1979), 633- 635.

[3] 林一星, 线性拓扑空间的子群的测度论性质, 数学学报, 33: 2(1990), 233- 235.

The Construction of Maximum Family of Orthogonal Random Measure and Its Uniqueness

Lin Yixing

(Longyan Normal School, Fujian 364000)

Abstract

In this paper we give construction of maximum family and its uniguenes about orthogonal random measure.

Keywords orthogonal random measure, spectral measure, maximum family.