第17卷第2期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 2
1997年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

在混合扰动下从闭轨族分支的极限环*

周 义 仓
(西安交通大学数学系, 西安710049)

摘 要 本文讨论了对确定微分方程组的向量场和分析其轨线穿过方向的参考闭曲线族同时进行扰动分支极限环的方法, 并给出了一个平面二次微分系统在混合扰动下分支出三个极限环的例子.

关键词 分支, 极限环, 微分方程
分类号 AMS(1991) 34C23/CCL O175.12

1 引 言

从闭轨线族经扰动产生极限环的方法, 是极限环分支理论中方便而有潜力的方法之一, 现在很多漂亮的结果是利用这一方法得到的. 本文以一个简单的平面微分系统为例说明这一方法如何向更精细、更深入的方面发展, 以得到更好的结果.

考虑具有小参数 λ 的平面微分方程系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \lambda f(x, y, \lambda), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \lambda g(x, y, \lambda), \end{cases} \tag{1$_\lambda$}$$

其中函数 f, g 具有相当的光滑性, 能保证系统 $(1)_\lambda$ 解的存在唯一性及解对参数和初始值具有一定阶数的可微性. 以前的判定定理都是对系统 $(1)_\lambda$ 引入判定函数

$$\Phi(A) = \int_0^{2\pi} [A\cos t f(A\cos t, A\sin t, 0) + A\sin t g(A\cos t, A\sin t, 0)]dt, \tag{2}$$

经过计算得到 $\Phi(A)$, 再通过 $\Phi(A)$ 的正零点及其 $\Phi(A)$ 在正零点两边符号的变化情况得到当 $|\lambda| \ll 1$ 时极限环存在性的结果. 这实际上是将 $(1)_0$ 的首次积分 $x^2 + y^2 = c$ 选作 $(1)_\lambda$ 的参考系, 用来判断当 $|\lambda| \ll 1$ 时, $(1)_\lambda$ 的轨线穿过 $x^2 + y^2 = c$ 的情况来确定是否存在极限环. 这个判定函数简单明了, 易于计算, 但有时不能解决问题, 需将它加以推广. 分析以前的扰动和判定方法看到, 它仅是对系统 $(1)_0$ 的向量场进行扰动, 没有对参考系 $x^2 + y^2 = c$ 进行扰动, 故无法区分 $(1)_\lambda$ 的轨线在更精细的参考系中的穿过方向, 使得有些情况下这个判定函数失效. 本文就是要引入更精细的参考曲线族, 即对 $(1)_0$ 的向量场及其参考系 $x^2 + y^2 = c$ 两方面进行扰动(故将它称为混合扰动), 以便给出更深入的判别方法.

* 1994年7月27日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

2　定理及其证明

引入系统$(1)_\lambda$的参考曲线系

$$F(x,y,\lambda)=\frac{x^2+y^2}{2}+\lambda\sum_{k=3}^{n}F_k(x,y,\lambda),\tag{3}_\lambda$$

其中$F_k(x,y,\lambda)$是系数与λ有关的x,y的k次齐次函数, $k=3,4,\cdots,n$. 由$F(x,y,\lambda)$的定义容易得到, 当$|\lambda|\ll 1$时, $F(x,y,\lambda)=c$对$(0,c_0)$中的c都是包围$(0,0)$的简单闭曲线, 且随着c的增加而单调扩大

由解对初值及参数的连续性知道, 当$|\lambda|\ll 1$时, $t=0$时从正x轴上点$(A,0)$出发的系统$(1)_\lambda$的解

$$\begin{cases}x=x(t,A,\lambda)\\ y=y(t,A,\lambda)\end{cases}\tag{4}_\lambda$$

经过时间$T(A,\lambda)$后必再一次与正x轴相交, 且$T(A,\lambda)$满足$T(A,0)=2\pi$. 为了判断它是否是$(1)_\lambda$的周期解, 只需判断

$$\begin{cases}x(T(A,\lambda),A,\lambda)=A\\ y(T(A,\lambda),A,\lambda)=0\end{cases}\tag{5}_\lambda$$

是否成立即可. 由前面$T(A,\lambda)$的定义, $y(T(A,\lambda),A,\lambda)=0$自然成立, 故关键是$(5)_\lambda$的第一式是否成立. 根据$F(x,y,\lambda)=c$关于$c$的单调性, 将$(5)_\lambda$的第一式化为等价的形式

$$F(x(T(A,\lambda),A,\lambda),y(T(A,\lambda),A,\lambda),\lambda)=F(A,0,\lambda),\tag{6}_\lambda$$

再根据微分与积分的关系将$(6)_\lambda$化为等价形式

$$\int^{T(A,\lambda)}\frac{d}{dt}F(x(t,A,\lambda),y(t,A,\lambda),\lambda)\,dt=0.\tag{7}_\lambda$$

注意到$(x(t,A,\lambda),y(t,A,\lambda))$是$(1)_\lambda$过$(A,0)$的解曲线, 故$(7)_\lambda$可以化为

$$\begin{aligned}G(A,\lambda)=\lambda\int^{T(A,\lambda)}\{&[-y+\lambda f(x,y,\lambda)]\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial F_k(x,y,\lambda)}{\partial x}\\&+[x+g(x,y,\lambda)]\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial F_k(x,y,\lambda)}{\partial y}\\&+xf(x,y,\lambda)+yg(x,y,\lambda)\}dt=0,\end{aligned}\tag{8}_\lambda$$

其中x,y用解曲线$(4)_\lambda$代入. 这样就可以适当地选择函数$F_k(x,y,\lambda)$, $k=3,4,\cdots,n$, 使得$(8)_\lambda$具有形式

$$G(A,\lambda)=\lambda^{m+1}\int^{T(A,\lambda)}\{H(x,y)+\lambda R(x,y,\lambda)\}dt\tag{9}_\lambda$$

记

$$G_1(A,\lambda)=\int^{T(A,\lambda)}\{H(x,y)+\lambda R(x,y,\lambda)\}dt\tag{10}_\lambda$$

$(9)_\lambda$, $(10)_\lambda$中积分号下函数$H(x,y)$, $R(x,y,\lambda)$中的x,y还是用$(4)_\lambda$代入. 于是就可引入判定函数

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\varphi(A) = \int_0^{2\pi} H(A\cos t, A\sin t)\,dt \qquad (11)_\lambda$$

用这判定函数即可得到下面判定极限环存在性的定理

定理 若有$A_0 > 0$, 使$\varphi(A_0) = 0$, 且$\varphi'(A_0) \neq 0$, 则当$|\lambda| \ll 1$时, 在$x^2 + y^2 = 2A_0^2$的邻域存在$(1)_\lambda$周期解

证明 当$|\lambda| = 0$时, 此结论显然成立. 而当$0 < |\lambda| \leq 1$时, 根据前面的分析, $(1)_\lambda$有无周期解等价于$G_1(A, \lambda) = 0$关于A是否有正根A_0, 从函数$G_1(A, \lambda)$的定义有$G_1(A, 0) = \varphi(A)$, $\frac{\partial G_1(A, 0)}{\partial A} = \varphi'(A)$, 故当定理的条件满足时, 利用隐函数定理即可保证当$|\lambda| \ll 1$时, 有函数$A = A(\lambda)$, $A(0) = A_0$, 使$G_1(A(\lambda), \lambda) \equiv 0$, 即当$|\lambda| \ll 1$时, 系统$(1)_\lambda$过$(A(\lambda), 0)$的解是周期解, 它在$x^2 + y^2 = 2A_0^2$的邻域之中. 定理证毕.

3 例 子

下面给出用这一方法从平面二次系统产生三个极限环的例子.

考虑平面二次微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + w_0\lambda^6 x + \lambda x^2 + (5 + w_2\lambda^2)\lambda xy - \lambda y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \lambda x^2 + (-2 + w_1\lambda^4)\lambda xy, \end{cases} \qquad (12)_\lambda$$

对系统$(12)_\lambda$, 选取参考系$F(x, y, \lambda) = c$中的函数$F(x, y, \lambda)$如下

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{(6 + w_2\lambda^2)\lambda}{3}x^3 - \lambda x^2 y + \frac{(1 - w_1\lambda^4)\lambda}{3}y^3 + \frac{(5 + w_2\lambda^2)(6 + w_2\lambda^2)\lambda^2}{4}x^4 \\ &- (5 + w_2\lambda^2)\lambda^2 x^3 y + \frac{(5 + w_2\lambda^2)[1 + (5 + w_2\lambda^2)(6 + w_2\lambda^2)]\lambda^3}{5}x^5 - (5 + w_2\lambda^2)^2\lambda^3 x^4 y \\ &+ (5 + w_2\lambda^2)\lambda^3 x^3 y^2 + \frac{(5 + w_2\lambda^2)\lambda^3}{3}x^2 y^3 + \frac{2(5 + w_2\lambda^2)\lambda^3}{15}y^5 + (819 + \frac{1}{6})\frac{\lambda^4}{6}x^6 \\ &- (5 + w_2\lambda^2)[1 + (5 + w_2\lambda^2)^2]\lambda^4 x^5 y + \frac{505}{12}\lambda^4 x^4 y^2 + \frac{(2w_2\lambda^2 + 3)(5 + w_2\lambda^2)\lambda^4}{9}x^3 y^3 \\ &+ \frac{5\lambda^4}{3}y^6 + \frac{1}{7}(4387 + \frac{1}{3})\lambda^5 x^7 - (689 + \frac{1}{6})\lambda^5 x^6 y + (298 + \frac{2}{3})\lambda^5 x^5 y^2 \\ &- (23 + \frac{11}{18})\lambda^5 x^4 y^3 + \frac{5}{3}\lambda^5 x^3 y^4 + (9 + \frac{7}{9})\lambda^5 x^2 y^5 + (5 + \frac{41}{63})\lambda^5 y^7. \end{aligned}$$

经过计算得与$(9)_\lambda$对应的函数$G(A, \lambda)$如下

$$\begin{aligned} G(A, \lambda) &= \lambda^6 \int^{\tau(A, \lambda)} \{w_0 x^2 - w_1 x^2 y^2 + \sum_{k=0}^{1} c_{4k} x^{2k+1} y^{2k} + \sum_{k=0}^{5} c_{5k} x^4 y^{5-k} - \frac{5w_2}{3}x^4 y^2 \\ &+ \sum_{k=0}^{2} c_{6k} x^{2k+1} y^{5-2k} + \sum_{k=0}^{7} c_{7k} x^k y^{7-k} + (3698 + \frac{1}{6})x^8 - (24835 + \frac{1}{2})x^6 y^2 \\ &- 1945 x^4 y^4 + (132 + \frac{1}{3})x^2 y^6 + \sum_{k=0}^{3} c_{8k} x^{2k+1} y^{7-2k} + \lambda R(x, y, \lambda)\} \Big|_{\substack{x = A\cos t \\ y = A\sin t}} dt, \end{aligned}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 $R(x, y, \lambda)$ 为 x, y, λ 的多项式, c_{jk} 是与 w_0, w_1, w_2 有关的常数, 根据这一 $G(A, \lambda)$ 的表示式可计算出与(11)式对应的 $\varphi(A)$ 是

$$\varphi(A) = A^2\pi[w_0 - \frac{w_1}{4}A^2 - \frac{5w_2}{24}A^4 + \frac{85}{64}A^6].$$

为了方便, 记 $w_0 = a_0, -\frac{w_1}{4} = a_1, -\frac{5w_2}{24} = a_2, \frac{85}{64} = a_3, A^2 = z$, 故 $\varphi(A) = 0$ 可以化为

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = 0,$$

其中 a_0, a_1, a_2 是可以任意选取的常数 所以对任意指定的正数 $z_1 < z_2 < z_3$, 可选取 $a_0 = -a_3 z_1 z_2 z_3$, $a_1 = a_3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$, $a_2 = -a_3(z_1 + z_2 + z_3)$, 此时, $\varphi(z_k) = 0$, 且 $\varphi'(z_k) \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, 故由定理的结果知, 上面的系统(12)$_\lambda$ 当 $|\lambda| \ll 1$ 时, 在 $x^2 + y^2 = 2z_k^2$ $(k = 1, 2, 3)$ 的邻域内有周期解, 这样就得到了当参数 λ 很小时, 在相平面上较大的周期解, 用别的方法要得到这样的结果还是比较困难的

最后需要指出的是还可用此方法进一步讨论更一般的微分方程系统分支产生的极限环及其稳定性

参 考 文 献

[1] 张锦炎, 常微分方程几何理论与分支问题, 北京大学出版社, 1987.

[2] 黄其明, 李继彬, 平面三次微分系统的极限环复限分支, 云南大学学报, No. 1, 1985.

[3] 叶彦谦, 极限环论, 上海科技出版社, 1984

[4] 张芷芬, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1985.

[5] Comen Chicone and Marc Jacobs, *Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones*, Journal of differential equtaions, 91: 2(1991), 268-326.

Bifurcation of Limit Cycles from Planar Isochrones Depending on a Small Parameter

Zhou Yicang

(Dept. of Math., Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract

In this paper planar vector fields and their periodic trajectories surrounding an isochronous center are perturbed to bifurcate limit cycles. A criterion function is given to determine the number and position of limit cycles which emerge from the periodic trajectories of unperturbed vector fields. A plane quadratic vector field is used to show the advantage of the method presented in this paper.

Keywords bifurcation, limit cycles, differential equations.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.