第17卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 17 No. 2
1997年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1997

作为一般性反例的Hamilton图*

孙 建 新
(浙江绍兴文理学院, 312000)

摘　要　文[2]对文[1]中的定理3, 就 $p=2$ 的特殊情况给一个反例. 本文则对 $p>3$ 的一般情况给出一类反例.

关键词　Hamilton 图, Hamilton 圈, 生成子图, 相间偶圈, 圈间桥.
分类号　AMS(1991) 05C40/CCL O157.5

设 G 为连通图, Q 为 G 的顶点度为 $d_G(v_i)-2\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的特定生成子图[1], $C(\overline{Q})\overset{\triangle}{=}G-E(Q)=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_p$ 为 p 个不连通的初等子圈, 又设 M 为 Q 与 $C(\overline{Q})$ 之间的相间偶圈[1], 由定义知 M 的边间隔地属于 Q 或 $C(\overline{Q})$. 一种特款是 M 与 $C(\overline{Q})$ 中的每个子圈 $C_i\,(i=1,2,\cdots,p)$ 有且仅有一条公共边, 称这样的 M 为最小历遍相间偶圈, 则由文[2]可知:

(i)　若 G 存在最小历遍相间偶圈, 则 G 必为 Hamilton 图;

(ii)　并非所有的 Hamilton 图都存在最小历遍相间偶圈.

于是, 当一个 Hamilton 图的顶点全落在 p 个不连通的初等子圈上时 $(p\geq 2)$, 可按是否存在最小历遍相间偶圈将这些 Hamilton 图分成两类: 凡是存在最小历遍相间偶圈的, 称之为平凡 Hamilton 图; 否则称之为非平凡 Hamilton 图.

文[1]定理3相当于认为"Hamilton 图必定是平凡的", 文[2]已指出该结论不成立, 并在 $p=2$ 的情况下构造出一个非平凡的 Hamilton 图, 并称之为"七桥图". 注意, 在文[1], [2]中, 将连接不同子圈的边称为"桥", 这种"圈间桥"与普通桥的定义有别, 但本文仍借用这一说法.

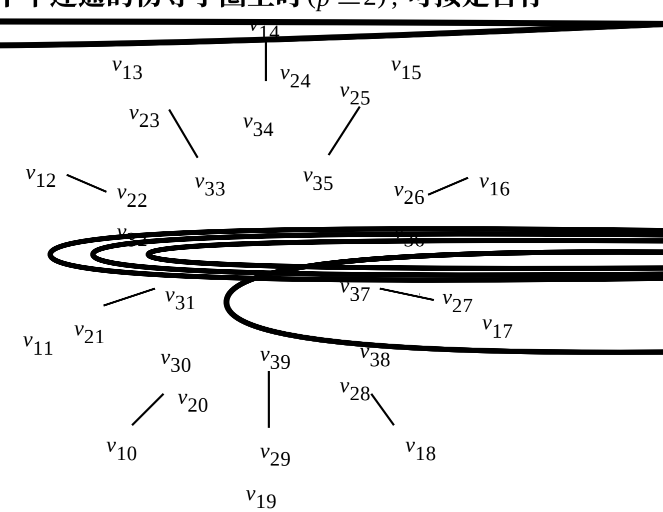

图　1

图1所示的图 G 的30个顶点全落在三个初等子圈上, 每个子圈都有10个顶点, G 为3度正则的, 即每个顶点除了在同一子圈上有2个邻点外, 都恰有一条圈间桥与别的子圈上某一顶点相邻. 于是30个顶点共有15条圈间桥, 就称

* 1994年4月13日收到. 1996年7月15日收到修改稿.

G 为"十五桥图."

定理1 十五桥图为非平凡 Hamilton 图(证明略).

一般地, 对于整数 $p>3$时, 构造 G_p, 使得 G_p 具有如下特征:

(i) G_p 有 p 条水平线, 每条水平线的左右端点 v_{i1}表示同一顶点, 即 G_p 有 p 个初等子圈;

(ii) 每个子圈都有$2m$ ($m=p+2$) 个顶点, G_p 共有$2mp$ 个顶点;

(iii) G_p 为3度正则的, 即每个顶点除了在同一子圈上有两个邻点外, 都有一条圈间桥与另一子圈上的一个顶点相邻, G_p 共有 mp 条桥:

$$(v_{i,2k-i-1}v_{i+1,2k-i-1}), \qquad k=[(i+1)/2],\cdots,m+[i/2];$$

$$(v_{1,2k-1}v_{p,2k-1+m-2m[(2k-1)/m]}), \quad k=1,2,\cdots,m.$$

这里$[a]$表示 a 的整数部分.

定理2 G_p 为非平凡的 Hamilton 图.

证明从略.

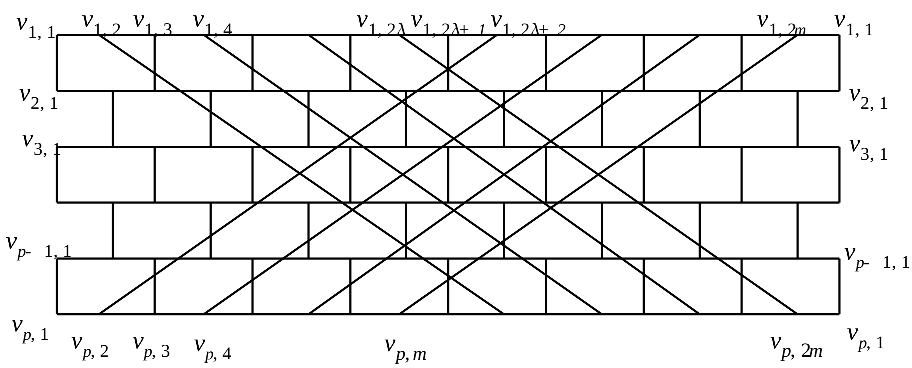

图 2

参 考 文 献

[1] 陈 婵, Hamilton 图及其特定生成子图的关系, 数学研究与评论, 8: 4(1988), 521- 534.

[2] 孙建新, Hamilton 图的特定生成子图问题的反例, 数学研究与评论, 13: 4(1993), 582- 584.

General Counter Examples on a Problem of Special Generating Subgraph of Hamiltonian Graph

Sun Jianxin

(Shaoxing Arts and Science College, Zhejiang 312000)

Abstract

A counter example with $p=2$ of Th. 3 in [1] is given in [2]. In this paper, we construct a class of counter examples with $p\geq 3$.

Keywords Hamilton graph, Hamilton cycle, generating subgraph, alternate evencycle, bridge between cycles