

关于Ladas等人振动性定理的一点评注*

刘 树 堂

(滨州师范专科学校数学系, 山东 256604)

摘 要 本文对 G. Ladas 等[1]中的主要结果, 在一定条件下给出了一个改进, 使结果应用更为方便

关键词 差分方程, 振动性, 正解, 特征方程

分类号 AM S(1991) 39A 10/CCL O 175 7

考虑时滞差分方程

$$A_{n+1} - A_n + \sum_{i=1}^m q_i A_{n-k_i} = 0, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

其中

$$q_j \in (0, \infty), k_j \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, j = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

而 m 是一个正整数 又(1) 的特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda^{-1} + \sum_{j=1}^m q_j \lambda^{-k_j} = 0 \quad (3)$$

在文[1] 中Ladas 等人给出了下面的主要结果:

定理 设(2) 成立, 则下面的论述是等价的

(a) 方程(1) 的每一个解振动

(b) 特征方程(3) 没有正的特征根

定理中条件(b), 即 $F(\lambda) = 0$, 对于一般的正整数 m , 它是一个高次的代数方程, 显然考虑其根的性质是困难的, 因此结论对于实际应用带来不方便, 但是当 $m = 1$ 时, 下面给出了一个具体判定根的性质条件, 从而弥补了这一不足 事实上对于 $m = 1$ 时, 方程(1) 化为

$$A_{n+1} - A_n + q_1 A_{n-k_1} = 0 \quad (4)$$

(3) 化为

$$\tilde{F}(\lambda) = \lambda^{-1} + q_1 \lambda^{-k_1} = 0 \quad (5)$$

又注意对于 $\lambda > 0$ 时有:

$$\min_{\lambda > 0} ((\lambda^{-1} + q_1 \lambda^{-k_1})) = (k_1 q_1)^{\frac{1}{k_1+1}} \frac{k_1 + 1}{k_1} - 1$$

从而有下面的结论:

定理 1 设 $q_1 \in (0, \infty), k_1 \in \{1, 2, 3, \dots\}$, 令

* 1994年4月9日收到, 1996年8月7日收到修改稿

$$\alpha = (k_1 q_1)^{\frac{1}{k_1+1}} \frac{k_1+1}{k_1} > 1,$$

则下面的论述是等价的

(a) 方程(4) 的每一个解振动

(b) 方程(5) 没有正的特征根

又注意

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} + q_1 \lambda^{k_1} &= (1 - \lambda) \left(-1 + \frac{q_1 \lambda^{k_1}}{1 - \lambda} \right) \\ &\geq (1 - \lambda) \left(-1 + q_1 \inf_{0 < \lambda \leq 1} \left(\frac{\lambda^{k_1}}{1 - \lambda} \right) \right) \\ &= (1 - \lambda) \left(-1 + q_1 \frac{(k_1 + 1)^{k_1+1}}{k_1^{k_1}} \right) \end{aligned}$$

从而有:

定理 2 设 $q_1 \in (0, \infty)$, $k_1 \in \{1, 2, 3, \dots\}$, 并且

$$q_1 \frac{(k_1 + 1)^{k_1+1}}{k_1^{k_1}} > 1,$$

则方程(4) 的每一个解振动

参 考 文 献

[1] G. Ladas, Ch. G. Philos, Y. G. Sficas, *Libertas Mathematica* Vol 9(1989). 121 - 125

Remarks on Ladas' Oscillation Theorem

Liu Shutang

(Department of Math. Bingzhou Normal College, Shandong 256604)

Abstract

We improve the main result of G. Ladas etc in article [1], and made it convenient to be applied

Keywords difference equations, oscillation, positive solution, characteristic equations