第17卷第2期 数学研究与评论 Vol.17 No.2
1997年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

Banach 空间中复合算子的不动点定理*

李 凤 友
(天津师范大学数学系, 300074)

摘 要 本文给出Banach 空间中集值与单位增算子的不动点定理, 它推广了文[1]—[4]中相应的结果

关键词 Banach 空间, 集值复合增算子, 弱上半闭, 拟弱紧集, 不动点
分类号 AMS(1991) 47H10/CCL O177.91

定义1[1] 设X 是具有半序结构的Hausdorff 拓扑空间. 若对于X 中任意两个网$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, $\{y_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, $x_\alpha\xrightarrow{\tau}x$, $y_\alpha\xrightarrow{\tau}y$ 且$x_\alpha\le y_\alpha$, $\forall\alpha\in\Lambda$, 就有$x\le y$, 则称X 是一个半序拓扑空间.

注 文中$x_\alpha\xrightarrow{\tau}x$ 表按X 中拓扑τ网收敛于x.

定义2 设E 是Banach 空间, P 是E 中锥, E 中半序由P 导出, $D\subset E$. 若对于D 中网$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, $x_\alpha\xrightarrow{w}x$, 且$x_\alpha\le x$, $\forall\alpha\in\Lambda$, 蕴含$x\in D$, 则称D 为X 中弱上半闭集.

定义3 设E 是Banach 空间, P 是E 中锥, $D\subset E$. 若对于D 中每一可数全序子集$\{x_n\}$, 都存在子列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 使得$x_{n_k}\xrightarrow{w}x\in E$, 则称$D$ 是E 中拟弱紧集.

定义4 设E 是Banach 空间, P 是E 中锥, $D\subset E$. 若对于D 的每一全序子集N, 都存在N 的至多可数子集$\{x_n\}$ 在N 中弱稠(即对于任一$x\in N$, 存在$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 使得$x_{n_k}\xrightarrow{w}x$), 则称$D$ 是E 中拟弱可分集.

注 文中$x_n\xrightarrow{w}x$ 表$\{x_n\}$ 弱收敛于x.

定义5[2] 设X 是半序集, $D\subset X$, $A:D\to 2^D$ 是集值算子. 若$\forall x,y\in D$, $x\le y$ 及$u\in Ay$, 都存在$v\in Ay$, 使得$u\le v$, 则称A 是一个集值增算子.

引理1 设E 是Banach 空间, P 是E 中锥, E 中半序由P 导出, 则E 按弱拓扑是一半序拓扑空间.

定理1 设X 是半序集, Y 是Banach 空间, P 是Y 中锥. $D\subset X$ 非空, $B:D\to Y$ 是增算子, $C:BD\to 2^{BD}$ 是集值增算子, $T:BD\to D$ 是增算子且BD 是Y 中弱上半闭集, 令$A=TCB$. 若

i) BD 是Y 中拟弱可分的拟弱紧集;

ii) $\forall x\in D$, $BA(x)$ 是Y 中弱序列紧集;

iii) $\exists x_0\in D$ 及$u_0\in Ax_0$, 使得$Bx_0\le Bu_0$,

则A 在D 中有不动点.

* 1994年2月18日收到. 1996年6月6日收到修改稿

在单值映射下可得下面定理

定理 2 设 X 是半序集, Y 是 Banach 空间, P 是 Y 中锥, D 是 X 中非空子集, $B: D \to Y$ 是增算子, $C: BD \to D$ 是增算子且 BD 是 Y 中弱上半闭集. 令 $A = CB$. 若

i) BD 是 Y 中拟弱可分的拟弱紧集;

ii) $\exists x_0 \in D$, 使得 $x_0 \leq A x_0$,

则 A 在 D 中有不动点.

推论 设 X 是半序集, $D = [u_0, v_0]$ 是 X 中序区间, Y 是 Banach 空间, $B: D \to Y$ 是增算子, $C: [B u_0, B v_0] \to X$, $A = CB$. 若

i) $u_0 \leq A u_0, A v_0 \leq v_0$;

ii) BD 是 Y 中拟可分的拟紧集,

则 A 在 D 中有不动点.

注 定理 1 和定理 2 是文[1] - [4] 在 Banach 空间中相应定理的推广.

参 考 文 献

[1] 孙经先, 非连续的增算子的不动点定理及其含间断项的非线性方程的应用, 数学学报, 31: 1 (1988), 101- 107.

[2] 孙经先, 增算子的不动点和广义不动点, 数学学报, 32: 4 (1989), 457- 463.

[3] Sun Jingxian and Sun Yong, *Some fixed point theorems of increasing operators*, Appl. Anal. 23 (1986), 23- 27.

[4] 郭大钧, 非线性泛函分析, 山东科技出版社, 1985.

Some Fixed Point Theorems for Composite Operators in Banach Spaces

Li Fengyou

(Dept. of Math., Tianjin Normal University)

Abstract

In this paper, we give some fixed point theorems for multi-valued and single valued increasing operators in Banach spaces, which generalizes the corresponding results of [1]- [4].

Keywords Banach space, multi-valued composite increasing operator, weakly upper-semi-closed set, quasi-weakly compact, set fixed point.