群环上的幂自由模*

陈 焕 良
(湖南师范大学数学系, 长沙410006)

摘 要 本文证明了: 设 R 为 $\mathrm{char}R\neq 0$, G 为有限生成的 Abel 群, 则: $P\in\underline{\underline{F}}(RG)$ 当且仅当 $\exists\, s>0$, 使得 $P^s\in\underline{\underline{F}}(RG)$.

关键词 Artin 环, K_0群, 特征
分类号 AMS(1991) 20K/CCL O154

众所周知, 群环上的投射模是刻画群环的一个有力工具, 它不仅可以推广多项式环的性质, 而且在群的表示理论中有着极其广泛的应用. 本文研究群环上投射模的幂自由与自由性的等价关系. 所有环都是带单位元交换环.

命题 1 如果 $\forall P\in\underline{\underline{P}}(R)$, $P\in\underline{\underline{F}}(R)$ 当且仅当 $\exists\, s>0$, 使得 $P^s\in\underline{\underline{F}}(R)$, 则下列两款等价:

(1) $R\in PF$.

(2) $\widetilde{K}_0R$ 为挠群.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 显然.

(2)$\Rightarrow$(1) $\forall P\in\underline{\underline{P}}(R)$, 因为 $\widetilde{K}_0R$ 为挠群, 故 $\exists\, s>0$, 使得 $s\overline{[P]}=\bar{0}$, 即 $\exists\, t>0$, 使得 $s[P]=t[R]$, 从而 $[P^s]=[R^t]$, 故 $\exists\, m>0$, 使得 $P^{sm}\simeq R^{tm}$, 由条件知 $P\in\underline{\underline{F}}(R)$, 因此 $R\in PF$.

因此幂自由与自由性等价的环上就可以利用约化群的挠性来研究其投射自由性.

命题 2 下列四款等价:

(1) $\exists\, s>0$, 使 $P^s\in\underline{SF}(R)$.

(2) $\exists\, t>0$, 使 $P^t\in\underline{\underline{F}}(R)$.

(3) $\exists\, m>0$, 使 $P^{\otimes m}\in\underline{SF}(R)$.

(4) $\exists\, n>0$, 使 $P^{\otimes n}\in\underline{\underline{F}}(R)$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 显然.

(2)$\Rightarrow$(4) 根据文[2]定理易证.

(4)$\Rightarrow$(3) 显然.

(3)$\Rightarrow$(2) 因为 $P^{\otimes m}\in\underline{SF}(R)$, 故存在 $k>0$ 使得 $(P^{\otimes m})^k\in\underline{\underline{F}}(R)$, 由文[2]定理知 $\exists\, l>0$, 使得 $(P^{\otimes m})^{\otimes l}\in\underline{\underline{F}}(R)$, 从而 $P^{\otimes ml}\in\underline{\underline{F}}(R)$, 又由文[2]即得 $\exists\, t>0$, 使得 $P^t\in\underline{\underline{F}}(R)$.

* 1994年9月6日收到

引理 3 设 R 为半遗传环, G 为有限生成的无挠 Abel 群, 则 $K_0RG \simeq K_0R$.

证明 因为 R 为半遗传环, 故 $R, R[x_1, \cdots, x_n]$ 都是凝聚环, 更有 $R[x_1, \cdots, x_n, x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}]$ 也是凝聚环. 又因为 $\text{w.gl}\dim R \le 1$, $\text{w.gl}\dim R[x_1, \cdots, x_n, x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}] \le \text{w.gl}\dim R[x_1, \cdots, x_n] = \text{w.gl}\dim R + n \le n + 1 < \infty$, 所以 $R, R[x_1, \cdots, x_n, x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}]$ 都是拟正则环, 从而类似于文[3]引理 9 即可得 $K_0R[x_1, \cdots, x_n, x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}] \simeq K_0R$, 亦即 $K_0RG \simeq K_0R$.

定理 4 设 R 为 Artin 环且 $\text{char}R \neq 0$, G 为有限生成的 Abel 群, 则下列两款等价:

(1) $P \in \underline{\underline{SF}}(RG)$.

(2) $\exists s > 0$, 使 $P^s \in \underline{\underline{SF}}(RG)$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $G = G_0 \oplus \text{Tor}G$, G_0 为有限生成的无挠群. 因为 R 为 Artin 环, 所以根据文[4]知 $R/J(R)$ 为 VN 正则环, 更为半遗传环; 由引理 3 即得:

$$K_0(R/J(R))G_0 \simeq K_0(R/J(R)) \simeq K_0R \text{ 为无挠群.}$$

因为 $\text{char}R \neq 0$, 不妨设 $\text{char}R = q$, 所以 $q \cdot 1 = 0$, 即有 $q \cdot (1 + J(R)) = 0 + J(R)$, 故 $\text{char}R/J(R) \neq 0$, 不妨设 $\text{char}R/J(R) = p_1^{r_1}, \cdots, p_s^{r_s}$, $(p_1, \cdots, p_s) = 1$. 所以 $R/J(R) = R_1 \oplus \cdots \oplus R_s$, 这里 $\text{char}R_i = p_i^{r_i} (1 \le i \le s)$. 由于 $\text{w.gl}\dim R/J(R) = \max\limits_{1 \le i \le s} \text{w.gl}\dim R_i = 0$, 所以 R_i 为 VN 正则环.

由前述讨论可知 $K_0R_iG_0$ 为无挠群.

若 $|\text{Tor}G| \in U(R_iG_0)$, $\forall P \in \underline{P}(R_iG)$, 如果 $\exists s, t > 0$, 使得 $P^s \simeq (R_iG)^{st}$, 因为 P 也是有限生成投射 R_iG_0-模, 因此有 R_iG_0-模同构: ${}_{R_iG_0}P^s \simeq {}_{R_iG_0}(R_iG)^{st} \simeq (R_iG_0)^{st|\text{Tor}G|}$.

由于 $K_0R_iG_0$ 为无挠群, 故有稳定同构: ${}_{R_iG_0}P \overset{s}{\simeq} (R_iG_0)^{t|\text{Tor}G|}$.

不妨设 $\varphi: {}_{R_iG_0}P \oplus (R_iG_0)^m \simeq (R_iG)^t \oplus (R_iG_0)^m$, 更有

$${}_{R_iG_0}P \oplus (R_iG_0)^{m|\text{Tor}G|} \simeq (R_iG)^t \oplus (R_iG_0)^{m|\text{Tor}G|},$$

从而有

$$\varphi: {}_{R_iG_0}P \oplus (R_iG)^m \simeq (R_iG)^t \oplus (R_iG)^m.$$

定义 $\psi: \psi(p) = |\text{Tor}G|^{-1} \sum\limits_{g \in \text{Tor}G} g^{-1}\varphi(g \cdot p)$, $\forall p \in {}_{R_iG_0}P \oplus (R_iG)^m$, 可以证明 ψ 为同构, 即有 R_iG-模同构: $\psi: P \oplus (R_iG)^m \simeq (R_iG)^t \oplus (R_iG)^m$, 从而有 $P \overset{s}{\simeq} (R_iG)^t$, 故 K_0R_iG 为无挠群.

因为 $\text{char}R_i = p_i^{r_i}$, 如果 $p_i \nmid |\text{Tor}G|$, 则 $(p_i^{r_i}, |\text{Tor}G|) = 1$, 故 $\exists k, l$ 使得

$$k \cdot p_i^{r_i} + l \cdot |\text{Tor}G| = 1,$$

从而有 $1_R = 1 \cdot 1_R = (k \cdot 1_R)(p_i^{r_i} \cdot 1_R) + (l \cdot 1_R)(|\text{Tor}G| \cdot 1_R) = (l \cdot 1_R) \cdot |\text{Tor}G| \cdot 1_R)$, 因此 $|\text{Tor}G| \in U(R)$, 由前述讨论知 K_0R_iG 为无挠群.

如果 $p_i \mid |\text{Tor}G|$, 则可设 $|\text{Tor}G| = p_i^t q_1^{s_1}, \cdots, q_n^{s_n}$, 故有分解:

$$\text{Tor}G \simeq G_{p_i} \oplus G_{q_1} \oplus \cdots \oplus G_{q_n}.$$

因为 $\text{char}R_i = p_i^{r_i}$, 根据文[3]命题 3 知 $\text{char}R/J(R) = p_i$; 又由文[3]引理 5 即得:

$$K_0R_iG \simeq K_0(R_iG_0(G_{q_1} \oplus \cdots \oplus G_{q_n}))G_{p_i} \simeq K_0(R_iG_0)(G_{q_1} \oplus \cdots \oplus G_{q_n}).$$

这里由于 $\mathrm{char}R_iG_0(G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_n})=\mathrm{char}R_i=p_i^{r_i}$，故

$$\mathrm{char}R_iG_0(G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_n})/J(R_iG_0(G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_n}))=p_i.$$

又因为 $p_i\nmid|\mathrm{Tor}(R_iG_0)(G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_n})|$，从而由前述讨论即知：$K_0R_iG$ 为无挠群。因而 $K_0R_1G\oplus\cdots\oplus K_0R_nG\simeq K_0(R_1\oplus\cdots\oplus R_n)G\simeq K_0(R/J(R))G$ 为无挠群。

作环同态：

$$f:RG\to(R/J(R))G,\quad \sum_g r_gg\to\sum_g\overline{r_g}g.$$

由于 R 为 Artin 环，所以 $\mathrm{Ker}f=J(R)G=N(R)G\subset N(RG)\subset J(RG)$，因此有单同态：$K_0f:K_0RG\rightarrowtail K_0(R/J(R))G$

由于 $K_0(R/J(R))G$ 为无挠群，易证 K_0RG 也为无挠群。

设 $\exists s>0$，使得 $P^s\in\underline{\underline{SF}}(RG)$，不妨设：$P^{s_1}\oplus(RG)^{m_1}\simeq(RG)^{m_2}$，故存在 s_2，使得 $P^{s_2}\in\underline{\underline{F}}(RG)$，从而可设 $P^{s_2}\simeq(RG)^{s_2\mathrm{rank}P}$，因此有 $s_2\cdot([P]-[(RG)^{\mathrm{rank}P}])=0$，注意到 K_0RG 为无挠的，从而 $[P]-[(RG)^{\mathrm{rank}P}]=0$，亦即 $P\in\overline{\overline{SF}}(RG)$.

进一步有：

定理 5　设 R 为 Artin 环且 $\mathrm{char}R\neq0$，G 为有限生成的 Abel 群，则下列两款等价：

(1)　$P\in\underline{\underline{F}}(RG)$.

(2)　$\exists s>0$，使得 $P^s\in\underline{\underline{F}}(RG)$.

证明　(1)$\Rightarrow$(2) 显然。

(2)$\Rightarrow$(1)　因为 R 为 Artin 环且 $\mathrm{char}R\neq0$，不妨设 $\mathrm{char}R=p_1^{r_1}\cdots p_n^{r_n}$，$(p_1,\cdots,p_n)=1$，则有分解：$R\simeq R_1\oplus\cdots\oplus R_n$，这里 R_i 仍为 Artin 环且 $\mathrm{char}R_i=p_i^{r_i}(1\leq i\leq n)$.

因为 R_i 为 Noether 环且 $K\dim R_i=0\leq1$，而且由引理 3 知 $K_0R_iG_0\simeq K_0R$，即 $\forall P\in\underline{\underline{P}}(R_iG_0)$，有 $[P]\in I_m[K_0R_i\to K_0R_iG_0]$. 根据文[5]定理知 $\exists Q\in\underline{\underline{P}}(R_i)$，使得：$P\simeq R_iG_0\underset{R_i}{\otimes}Q$，由于 $R_i\in UCP$，容易证得 $R_iG_0\in UCP$.

设 $|\mathrm{Tor}G|\in U(R_iG_0)$，$\forall P\in\underline{\underline{SF}}(R_iG)$，不妨设 $P\oplus(R_iG)^u\simeq(R_iG)^v$，注意到有 R_iG_0-模同构：

$$P\oplus(R_iG_0)^{u|\mathrm{Tor}G|}\simeq(R_iG_0)^{v|\mathrm{Tor}G|}.$$

注意到 $|\mathrm{Tor}G|\in U(R_iG_0)$，从而易知 $P\in\underline{\underline{SF}}(R_iG_0)$. 由 $R_iG_0\in UCP$ 即知 $P\in\underline{\underline{F}}(R_iG_0)$，亦即有：

$$\varphi\quad P\simeq(R_iG_0)^{(v-u)|\mathrm{Tor}G|}\simeq(R_iG)^{v-u}.$$

令 $\theta:{}_{R_iG}P\to(R_iG)^{v-u}$. $\forall p\in P$，$\theta(p)=|\mathrm{Tor}G|^{-1}\sum_{g\in\mathrm{Tor}G}g^{-1}\varphi(g\cdot p)$

可以证明 θ 为 R_iG-模同构，即 $P\in\underline{\underline{F}}(R_iG)$，所以 $R_iG\in UCP$.

由于 $\mathrm{char}R_i=p_i^{r_i}$，如果 $p_i\nmid|\mathrm{Tor}G|$，类似于定理 4 中讨论可转化为 $|\mathrm{Tor}G|\in U(R_i)$ 讨论。如果 $p_i\,|\,|\mathrm{Tor}G|$，不妨设 $|\mathrm{Tor}G|=p_i^{r_i}q_1^{t_1}\cdots q_s^{t_s}$，则有 $\mathrm{Tor}G\simeq G_{p_i}\oplus G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_s}$. 由于 $p_i\nmid|\mathrm{Tor}(G_0\oplus G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_s})|$，由前述讨论知 $R_iG_0(G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_s})\in UCP$.

作环同态：

$$\varphi:R_iG\to R_iG_0(G_{q_1}\oplus\cdots\oplus G_{q_s}),\quad \sum_{g\in G_{p_i}}r_gg\to\sum_{g\in G_{p_i}}r_g.$$

由于 Kerφ为诣零理想, 所以 Ker$\varphi \subset J(R_iG)$, 另一方面 $R_iG_0(G_{q_1} \oplus \cdots \oplus G_{q_s}) \simeq R_iG/\mathrm{Ker}\varphi \in UCP$, 类似于文[1]中定理2的讨论知 $R_iG \in UCP$, 容易验证 $RG \simeq (R_1 \oplus \cdots \oplus R_n)G \simeq R_1G \oplus \cdots \oplus R_nG \in UCP$.

所以 $\forall P \in \underline{\underline{P}}(R)$, 若存在 $s > 0$, 使得 $P^s \in \underline{\underline{F}}(RG)$, 则更有 $P^s \in S\underline{\underline{F}}(RG)$, 根据定理4即得 $P \in \underline{\underline{SF}}(RG)$, 从而 $P \in \underline{\underline{F}}(RG)$.

推论6 设 R 为 Artin 环且 char$R \neq 0$, G 为有限生成的 Abel 群, 令 $S = R[[x_1, \cdots, x_n]]$, 则下列两款等价:

(1) $P \in \underline{\underline{F}}(SG)$.

(2) $\exists S > 0$, 使得 $P^s \in \underline{\underline{F}}(SG)$.

证明 注意到 $SG \simeq (R[[x_1, \cdots, x_n]])G \simeq (RG)[[x_1, \cdots, x_n]]$, 从而 $K_0SG \simeq K_0(RG)[[x_1, \cdots, x_n]] \simeq K_0RG$ 为无挠群, 并且 $SG \simeq (RG)[[x_1, \cdots, x_n]]$ 为稳定自由 SG-模都自由的环, 故易证得.

推论7 设 R 为半准素环且 char$R \neq 0$, C_1 为有限生成的 Abel 群, 令 $S = R[[x_1, \cdots, x_n]]$, 则下列两款等价:

(1) $P \in \underline{\underline{F}}(SC_1)$.

(2) $\exists S > 0$, 使得 $P^s \in \underline{\underline{F}}(SC_1)$.

参 考 文 献

[1] 陈焕艮, Abel 群环的约化群, 科学通报, Vol 39, 14(1994), 1261- 1264.

[2] H. Bass and R. Gualnick, *Projective modules with free multiples and powers*, Proceedings of the AMS, Vol 96, 2(1986), 207- 208.

[3] Chen Huanying, *On PF group rings*, 南京大学学报数学半年刊, Vol 11, 1(1994), 1- 5.

[4] K. R. Gooderl and R. B. Warfield, Jr., *Algebras over zero-dimensional rigns*, Math. Ann., 223 (1976), 157- 168.

[5] R. G. Swan, *Projective modules over Laurent polynomial rings*, Transaction of the AMS, Vol 237, 1978(3), 111- 120.

[6] 陈焕艮, Grothendieck 群及其应用, 南京大学博士毕业论文, 1994, 6.

Modules with Free Powers over Group Rings

Chen Huanyin

(Dept. of Math., Hunan Normal University, Changsha 410006)

Abstract

In this paper, we obtain the following result:

Let R be ring with char$R \neq 0$, G be a finitely generated abelian group. Then P is a finitely generated free RG-module if and only if there exists some $s > 0$ such that P^s is a finitely generated free RG-modules.

Keywords Artin ring, K_0-group and characteric.