第17卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 17 No. 3
1997年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1997

关于正则模的序*

张 远 平
(湖南师范大学数学系, 长沙410006)

摘 要 本文首次在模中引入序的概念, 并就正则模给出序的一些性质

关键词 正则模, 序, 内逆, 自反逆
分类号 AMS(1991) 16D/CCL O153.3

R. E. Hartwig[1]在半群中提出了序的概念, 并在环中讨论了这种序, 特别地, [2]和[3]论述了正则环中的序和极大元的一些性质 实际上, 关于矩阵广义逆的研究已涉及了这个问题(参看[4], [5], [6]). 在这些基础上, 本文在模中提出序的概念, 并就正则模给出序的一些性质

本文中, R 总是指有单位元的结合环, 所有的模都是单式的右 R-模, 模的同态写在左边 若 M 是环 R 上的模, 记 $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$, $S = \mathrm{End}_R(M)$. 自然, M^* 可以看作是 R-S-双模, M 可看作是 S-R-双模 定义映射 $(\ ,\ ): M^* \otimes_S M \to R$; $f \otimes m \to f(m)$ 和 $[\ ,\ ]: M \otimes_R M^* \to S$: $m \otimes f \to [m, f]$, 易见, 它们分别是 R-R-线性的和 S-S-线性的, 且对于任意 $m, m_1 \in M$ 及 $f \in M^*$ 有 $[m, f]m_1 = mf(m_1)$. 记 $\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid Mr = 0\}$.

对于 R-模 M 中的元 m, $m = mx(m)$ 在 M^* 中的解称为 m 的内逆, 记为 m^-; $m = mx(m)$, $x = (x, m)x$ 在 M^* 中的解称为 m 的自反逆, 记为 m^+. 易见, 对于正则模来说, 模中每个元都存在内逆和自反逆, 但一般不唯一 给定 $m \in M$, 若 m 有一个内逆 m^-, 可以证明

命题 1 $\{m\ 的内逆\} = m^- + (1_R - (m^-, m))M^* + M^*(1_S - [m, m^-])$;

$\{m\ 的自反逆\} = (m^- + (1_R - (m^-, m))M^*)m(m^- + M^*(1_S - [m, m^-]))$,

其中 1_R 和 1_S 分别是 R 和 S 的单位元

证明 显然, $m^- + (1_R - (m^-, m))M^* + M^*(1_S - [m, m^-]) \subseteq \{m\ 的内逆\}$. 若 x 是 m 的内逆, 则 $mx(m) = m$, $(m^-, m)(x, m)m^{-1} = (m^-, m)m^-$, 则 $(1_R - (1_R - (m^-, m)))x(1_S - (1_S - [m, m^-])) = m^-(1_S - (1_S - [m, m^-]))$, 展开易得 $x = m^- + ((m^-, m)x - m^-)(1_S - [m, m^-]) + (1_R - (m^-, m))x$, 即 $\{m\ 的内逆\} \subseteq m^- + M^*(1_S - [m, m^-]) + (1_R - (m^-, m))M^*$.

显然 $\{m\ 的自反逆\} \subseteq \{m\ 的内逆\}$, 所以易见 $\{m\ 的自反逆\} \subseteq (m^- + (1_R - (m^-, m))M^*)m(m^- + M^*(1_S - [m, m^-]))$. 反包含显然

下面利用内逆给出模中序的定义

* 1994年10月13日收到

定义 对于 R-模 M 中的任何元素 m, n, 若存在 m 的内逆 m^- 及 $m^=$, 使得 $(m^-, m) = (m^-, n)$, $[m, m^=] = [n, m^=]$, 定义 $m \leq n$.

下文中的模皆指正则模

定理 2 对于 R-模 M 中的任意元 m, n, 下列条件等价:

(1) $m \leq n$.

(2) 存在 m 的自反逆 m^+, 使得 $(m^+, m) = (m^+, n)$, $[m, m^+] = [n, m^+]$.

(3) $mR \subseteq nR$, $Sm \subseteq Sn$, $mR \cap (n-m)R = 0$, $Sm \cap S(n-m) = 0$.

(4) 存在 m 的自反逆 m^+ 及 $y \in M$, 使得 $n = m + (1_S - [m, m^+])y(1_R - (m^+, m))$.

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2) 取 $m^+ = (m^-, m)m^=$ 或 $(m^=, m)m^-$ 即可.

(2)$\Rightarrow$(3) 显然 $m(m^+, n) = m = n(m^+, m)$, 所以, $mR \subseteq nR$, $Sm \subseteq Sn$. 若 $mr = (n-m)r'$, $sm = s'(n-m)$, 其中 $r, r' \in R$, $s, s' \in S$, 则 $mr = [m, m^+]mr = [m, m^+](n-m)r' = 0$, $sm = sm(m^+, m) = s'(n-m)(m^+, m) = 0$, 于是就有 $mR \cap (n-m)R = 0$, $Sm \cap S(n-m) = 0$.

(3)$\Rightarrow$(2) 由 $mR \subseteq nR$ 及 $Sm \subseteq Sn$ 易见 $n(n^+, m) = m$, $m(n^+, n) = m$, 则 $(n-m)(n^+, m) + m(n^+, m) = m$, 由此知 $m(n^+, m) = m$. 令 $x = (n^+, m)n^+$, 可证 $m(x, m) = m$, $(x, m)x = x$, 即 x 是 m 的自反逆, 且 $[n, x] = [n(n^+, m), n^+] = [m(n^+, m), n^+] = [m, x]$, $(x, n) = (n^+, m(n^+, n)) = (n^+, m(n^+, m)) = (x, m)$, 即存在 m 的自反逆 m^+, 使得 $(m^+, m) = (m^+, n)$, $[m, m^+] = [n, m^+]$.

(4)$\Rightarrow$(2) 显然

(2)$\Rightarrow$(4) 由 (2) 知, $m(m^+, n) = n(m^+, m) = m$, 于是, $n = m + (1_S - [m, m^+])n = m + n(1_R - (m^+, m))$, 因此, $n = m + (1_S - [m, m^+])(m + n(1_R - (m^+, m))) = m + (1_S - [m, m^+])n(1_R - (m^+, m))$.

推论 $m \leq n$ 当且仅当 $n - m \leq n$ 当且仅当 $nR = mR \oplus (n-m)R$ 且 $Sn = Sm \oplus S(n-m)$.

正则模中所有元素关于定义中的二元关系"$\leq$"实际上构成一个偏序集, 为此, 先证

引理 3 $m \leq n$, 则对于任何 n^+, $m(n^+, m) = m$.

证明 由 $m \leq n$ 知, 存在 m 的自反逆 m^+, 使得 $[m, m^+] = [n, m^+]$, 且 $Sm \subseteq Sn$, 则

$$[m, n^+][m, m^+] = [m, n^+][n, m^+] = [m(n^+, n), m^+] = [m, m^+],$$

因此,

$$m(n^+, m) = [m, n^+][m, n^+]m = [m, m^+]m = m.$$

引理 4 $m \leq n$ 当且仅当存在 m 的自反逆 m^+, 使得对于所有的 n 的自反逆 n^+, 有 $(m^+, m) = (m^+, n) = (n^+, m)$, $[m, m^+] = [n, m^+] = [m, n^+]$.

证明 若 $m \leq n$, 则存在 m^+ 使得 $(m^+, m) = (m^+, n)$, $[m, m^+] = [n, m^+]$, 对于任意 n^+, 作 $x = (n^+, m)n^+$, 由引理 3 不难验证 x 是 m 的自反逆, 且 $(x, m) = (n^+, m(n^+, m)) = (n^+, m) = (n^+, m(n^+, n)) = (x, n)$, $[m, x] = [m(n^+, m), n^+] = [m, n^+] = [n(n^+, m), n^+] = [n, x]$. 反之显然

由上的引理可以证明

定理 5 模 M 中的二元关系"$\leq$"使得 M 中的元构成一个偏序.

证明 (1) 反身性显然.

(2) 反对称性: 若 $m \le n, n \le m$, 则存在 m^+ 及 n^+ 使得 $(m^+, m) = (m^+, n), [m, m^+] = [n, m^+], (n^+, m) = (n^+, n), [m, n^+] = [n, n^+]$, 则由引理 3 知,

$$m = m(n^+, m) = n(n^+, n) = n.$$

(3) 传递性: 若 $m \le n, n \le q$, 由引理 4, 可以适当地选择 m^+, 使得 $(m^+, m) = (m^+, n) = (n^+, m), [m, m^+] = [n, m^+] = [m, n^+]$, 其中 n^+ 使得 $(n^+, n) = (n^+, q), [n, n^+] = [q, n^+]$. 于是, $[m, m^+]q = m(n^+, q) = m(n^+, n) = m = [n, n^+]m = [q, n^+]m = q(n^+, m) = q(m^+, m)$, 由此式即得 $(m^+, m) = (m^+, q), [m, m^+] = [q, m^+]$, 即 $m \le q$.

命题 6 $m \le n$ 当且仅当对于任意 n^-, $m(n^-, m) = m$.

证明 若 $m \le n$, 则存在 m^+ 使得 $(m^+, m) = (m^+, n), [m, m^+] = [n, m^+]$, 于是 $m(n^-, m) = m(m^+, m)n^-[m, m^+]m = m(m^+, n)n^-[n, m^+]m = m(m^+, n)(m^+, m) = m(m^+, m)(m^+, m) = m$.

反之, 取定一个 n^-, 由命题 1 知, $n^- + M^*(1_S - [n, n^-])$ 中任意元都是 m 的内逆, 则 $m(n^- + M^*(1_S - [n, n^-]))m = m, [m, M^*](1_S - [n, n^-])m = 0$, 由正则模的半素性即知 $m = n(n^-, m)$, 于是 $mR \subseteq nR$; 同理, 由 $n^- + (1_R - (n^-, n))M^*$ 中的任意元都是 m 的内逆得 $m = m(n^-, n)$, 于是 $Sm \subseteq Sn$. 若 $mr = (n - m)r' \in mR \cap (n - m)R$, $sm = s'(n - m) \in Sm \cap S(n - m)$, 其中 $r, r' \in R, s, s' \in S$, 则 $mr = m(n^-, m)r = [m, n^-](n - m)r' = (m(n^-, n) - m(n^-, m))r' = 0$, $sm = sm(n^-, m) = s'(n - m)(n^-, m) = s'(n(n^-, m) - m(n^-, m)) = 0$, 即 $mR \cap (n - m)R = 0, Sm \cap S(n - m) = 0$, 由定理 2 知 $m \le n$.

推论 $m \le n \Leftrightarrow \{n$ 的内逆$\} \subseteq \{m$ 的内逆$\}$; $m = n \Leftrightarrow \{n$ 的内逆$\} = \{m$ 的内逆$\}$.

命题 7 M 是 R-模, $m, n, l, \cdots$ 都是 M 中的元素, 则

(1) $0 \le m$.

(2) 若 $m \le n, mR = nR$, 则 $m = n$;

(3) 若 $m \le n, Sm = nR$, 则 $m = n$;

(4) 若 $r \in R, m \le mr$, 则 $m = mr$;

(5) 若 $s \in S, m \le sm$, 则 $m = sm$;

(6) 若 $x = m^-$ 当且仅当 $m \le m(x, m)$;

(7) 若对于任意 $x, x' \in M^*$, $(x, m) = (x, n), [m, x'] = [n, x']$, 则 $m = n$;

(8) 若 $m \le n$, 且存在 $x \in M^*$ 使得 $(x, m) = 1_R$, 则 $m = n$;

(9) 若 $m \le n$, 且存在 $x \in M^*$ 使得 $[m, x] = 1_S$, 则 $m = n$;

(10) 若 $m \le n$, s, r 分别是 S, R 中的可逆元, 则 $smr \le snr$;

(11) 若 $(n^-, n) = 1_R$, 则 $m \le n$ 当且仅当 $m(n^-, m) = m, n(n^-, m) = m$;

(12) 若 $[n^-, n] = 1_S$, 则 $m \le n$ 当且仅当 $m(n^-, m) = m, n(n^-, m) = m$.

证明 利用定理 2, 定理 5 及命题 6 即可.

既然定理 5 说明正则模中元素关于二元关系"$\le$"构成一个偏序集, 那么对于这种二元关系可以考虑正则模中极大元的问题. 先给出如下定义.

定义 对于 R-模 M 中的元 m, n, 若 $m \le n$, 则一定有 $m = n$, 便称 m 是 M 中的极大元. 记 M 中极大元的集合为 μ.

定理 8　对于 R-模 M，下列条件等价:

(1) $m \in \mu$.

(2) 对于所有的 m^+，$(1_S - [m, m^+])M(1_R - (m^+, m)) = 0$.

(3) 对于所有的 m^-，$(1_S - [m, m^-])M(1_R - (m^-, m)) = 0$.

(4) $mr \in \mu$, r 是 R 的可逆元，

(5) $sm \in \mu$, s 是 S 的可逆元

若 $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$，则还有:

(6) 对于所有的 m^+，$(1_R - (m^+, m))M^*(1_S - [m, m^+]) = 0$,

(7) 对于所有的 m^-，$(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^+]) = 0$,

(8) m 的每个内逆都是 M 的自反逆

证明　(1)⇒(2) 由定理 2 知，对任何 m^+ 及 $t \in M$，$m \leq n = m + (1_S - [m, m^+])t(1_R - (m^+, m))$，由 $m \in \mu$ 知，$m = n$，即 $(1_S - [m, m^+])t(1_R - (m^+, m)) = 0$.

(2)⇒(3)　对于任何 m^-，取 $m^+ = (m^-, m)m^-$ 即可.

(3)⇒(2) 及 (1)⇔(4)⇔(5) 显然

(2)⇒(1)　由定理 2 知，若 $m \leq n$，则一定存在 m^+ 及 $t \in M$ 使得 $n = m + (1_S - [m, m^+])t(1_R - (m^+, m))$，由 (2) 知，$m = n$，即 $m \in \mu$

(3)⇒(7)　由 (3) 知，$M(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^-])M(M^*, M(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^-])M) \subseteq M(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^-])M(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^-])M = 0$，由正则模的半素性知 $M(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^-])M = 0$，由于 $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$，于是

$(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^-])M = 0$，$(1_R - (m^-, m))M^*(1_S - [m, m^-]) = 0$.

(6)⇔(7)　显然

(7)⇒(8)　由 (7) 知对任何 m^-，$(1_R - (m^-, m))m^-(1_S - [m, m^-]) = 0$，$m^- = (m^-, m)m^-$，所以，$m^-$ 是 m 的自反逆

(8)⇒(6)　对于任何 m^+ 及 $f \in M^*$，$m^+ + f(1_S - [m, m^+])$ 是 m 的内逆，因此也是自反逆，于是，$(m^+ + f(1_S - [m, m^+]), m)(m^+ + f(1_S - [m, m^+]) = m^+ + f(1_S - [m, m^+])$，由此得，$(1_R - (m^+, m))f(1_S - [m, m^+]) = 0$.

(6)⇒(2)　由 (6) 知 $M(1_R - (m^+, m))(M^*, (1_S - [m, m^+])M) = 0$，于是，$(1_S - [m, m^+])M(1_R - (m^+, m))(M^*, (1_S - [m, m^+])M(1_R - (m^+, m))) = 0$，由正则模的半素性可知 (2) 成立

命题 9　M 是 R-模，$\mathrm{Ann}_R(M) = 0$，m 是 M 的极大元，

(1) 若 $m(x, m) = 0$，则

(i) 对于所有的 m^+，$x = (x, m)m^+ + (m^+, m)x$;

(ii) $(x, m)x = 0$.

(2) 若 $[m, x] = 0$，$(x, m) = 0$，则 $x = 0$.

证明　(1) 对于任何 m^+，由 $m(x, m) = 0$ 知，$m(x + m^+, m) = m$，即 $x + m^+$ 是 m 的内逆，于是由命题 1，存在 $x_1, x_2 \in M^*$ 使得 $x + m^+ = m^+ + (1_R - (m^+, m))x_1 + x_2(1_S - [m,$

$m^{+}])$, 即 $x = (1_R - (m^{+}, m))x_1 + x_2(1_S - [m, m^{+}])$, 由定理7知, $(1_R - (m^{+}, m))x = (1_R - (m^{+}, m))x_1$, $x(1_S - [m, m^{+}]) = x_2(1_S - [m, m^{+}])$, 于是

$$x = (m^{+}, m)x + x(m, m^{+}).$$

由定理8知, $x + m^{+}$ 是 m 的自反逆, 则

$$(x + m^{+}, m)(x + m^{+}) = x + m^{+},$$

即

$$(x, m)x + (m^{+}, m)x + (x, m)m^{+} + m^{+} = x + m^{+},$$

由上一段即知 $(x, m)x = 0$.

(2) 由(1)易知

参 考 文 献

[1] R. E. Hartwig, Math. Jap., 25(1980), 1- 13.

[2] R. E. Hartwig, Math. Jap., 31(1986), 31- 38.

[3] 唐国平、郭金保, 科学通报, 12(1988), 893- 895.

[4] R. E. Hartwig, Lin. Alg. Appl., 11(1975), 271- 275.

[5] R. E. Hartwig, Arch. Rat. Math. Anal., 61(1976), 197- 251.

[6] R. Penrose, Proc. Camb. Philos. Soc., 51(1955), 406- 413.

On the Orders of the Regular Modules

Zhang Yuanping

(Hunan Normal University, Changsha 410006)

Abstract

The concept of the order in module is introduced for the first time, some properties of the orders are discussed.

Keywords regular module, order, inner inverse, reflexive inverse.