半质环的几个交换性定理*

郭 华 光

(广州师范学院数学系, 广州510400)

摘 要 本文得到了关于半质环的几个交换性定理, 推广了文献[2]和文献[3]中的有关结果

关键词 半质环, 交换性, 换位子, 幂零元

分类号 AMS(1991) 16A70/CCL O153.3

一

在本文中以 R 表示结合环(不要求有单位元 1), $Z(R)$ 表示 R 的中心, $[x,y]=xy-yx$. 邱琦章[2] 证明了下面的定理:

设 R 是有单位元 1 的半质环, 那么 R 是可换环, 如果对任意 $x,y\in R$, 存在正整数 $n=n(x)$ (或 $n=n(y)$), 使得 $[(xy)^n,(yx)^n]=0$.

将以上定理中有单位元的条件去掉, 对指数 n 作了一些变动, 得到以下定理:

定理 1 设 R 是半质环, l 是一个固定的自然数, 若对任意 $x,y\in R$, 均有正整数 $n=n(x,y)\le l, m=m(x,y)\le l$, 使得 $[(xy)^n,(yx)^m]\in z(R)$, 那么 R 是交换环.

证明 邱琦章指出[1]

设 R 是结合环, 若对任意 $x,y\in R$, 存在正整数 $n=n(x,y), m=m(x,y)$, 使得

$$[(xy)^n,(yx)^m]\in Z(R),$$

则 R 的换位子理想是诣零理想

所以, 只要证明满足定理 1 条件的半质环没有非零的幂零元即可.

设 $a\in R, a^2=0$, 任取 $r\in R$. 令 $x=ar+ara,\ y=ar$, 由定理条件知, 有正整数 $n=n(x,y)\le l, m=m(x,y)\le l$, 使

$$(xy)^n(yx)^m-(yx)^m(xy)^n\in Z(R). \tag{1}$$

利用 $a^2=0$ 进行计算, 注意到

$$(ar(ar+ara))^m=((ar)^2+(ar)^2a)^m=(ar)^{2m}+(ar)^{2(m-1)}(ar)^2a=(ar)^{2m}+(ar)^{2m}a.$$

于是(1) 式可展开化简为 $(ar)^{2(n+m)}a\in Z(R)$. 由此得

$$(ar)(ar)^{2n+2m}a=(ar)^{2n+2m}a(ar)=0,$$

进一步有

* 1994年8月15日收到

$$(ar)^{2n+2m+2}=0\quad(2n+2m+2\leq 4l+2).$$

故 aR 是指数有界的诣零右理想. 若 $aR\neq 0$, 则 R 必含非零的幂零右理想, 这与 R 的半质性矛盾, 故必有 $aR=(0)$, 从而 $a=0$. 得证.

定理 1 推广了文献[3] 中的定理 5.

推论 1　设 R 是半质环, l 是一个固定的自然数. 若对任意 $x,y\in R$, 存在正整数 $n=n(x,y)\leq l$, $m=m(x,y)\leq l$, 使得 $x^my^n-y^nx^m\in Z(R)$, 则 R 是交换环.

证明是显然的.

二

王崇寿[3] 证明了以下的定理:

设 R 是半质环, l 是一个固定的自然数. 若对任意 $x,y\in R$, 均有正整数 $n=n(x,y)\leq l$, 使 $(xy)^n-(yx)^n\in Z(R)$, 则 R 是交换环.

把它推广成下面的定理:

定理 2　设 R 是半质环, l 是一个固定的自然数, 若对任意 $x,y\in R$, 存在正整数 $n=n(x,y)$, 及另一正整数 $m=m(x,y)\leq l$, 使得 $(xy)^n\pm(yx)^m\in Z(R)$, 则 R 是交换环.

证明　邱琦章[1] 指出:

设 R 是结合环, 若对任意 $x,y\in R$, 存在正整数 $n=n(x,y)$, $m=m(x,y)$, 使得

$$(xy)^n\pm(yx)^m\in Z(R),$$

则 R 的换位子理想是诣零理想.

所以只要证明满足定理条件的半质环没有非零的幂零元即可.

设 $a\in R$, $a^2=0$, 任取 $r\in R$, 令 $x=ar+ara$, $y=ar$. 由定理条件知, 有正整数 $n=n(x,y)$ 及正整数 $m=m(x,y)\leq l$, 使 $((ar+ara)ar)^2\pm(ar(ar+ara))^m\in Z(R)$, 利用 $a^2=0$ 计算可得

$$(ar)^{2n}\pm((ar)^{2m}+(ar)^{2m}a)\in Z(R),$$

进一步可得

$$(ar)^{2m+2}=0,\quad(2m+2\leq 2l+2).$$

与定理 1 的证明中的理由相同, 可知 $a=0$. 得证.

三

王崇寿[3] 证明了半质环的交换性条件:

设 R 是半质环, l 是一个固定的正整数, 若对任意的 $x,y\in R$, 有小于 l 的正整数 $n=n(x,y)$, 使 $(xy)^k-x^ky^k\in Z(R)$, $k=n,n+1,n+2$, 则 R 是交换环.

发现定理中的条件 $k=n,n+1,n+2$, 实际上只要保留一个 $k=n+1$ 就可以了, 亦即成立下面的交换性定理:

定理 3　设 R 是半质环, l 是一个固定的正整数, 若对任意的 $x,y\in R$, 有小于 l 的正整数

$n=n(x,y)$, 使得$(xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1}\in Z(R)$, 则$R$ 是交换环.

为证明此定理, 首先证明下面的几个引理.

引理 1 设R 是半质环, l 是一个固定的正整数, 若对任意的$x,y\in R$, 有小于 l 的正整数$n=n(x,y)$, 使得$[x^ny^n,yx]=0$, 那么R 没有非零的幂零元.

证明 设$a\in R$, $a^2=0$, 任取$r\in R$, 令$x=a+ar$, $y=ar$. 由引理 1 的条件, 存在$n=n(x,y)\le l$, 使得$[x^ny^n,yx]=0$, 此即

$$[(a+ar)^n(ar)^n,(ar)(a+ar)]=0,$$

计算知$(ar)^{2n+1}a=0$, 从而$(ar)^{2n+2}=0$.

由R 的半质性可得$a=0$. 得证.

引理 2[5] 无非零幂零元的环同构于一组无零因子环的亚直和.

引理 3 设R 为满足引理 1 的所有条件的半质环, 并且R 可嵌入体中, 那么R 是交换环.

证明 与文献[2]引理 3 的证法相同, 为节省篇幅不重复写出了.

引理 4 设R 为满足引理 1 的所有条件的半质环, 那么R 是交换环.

证明 由引理 1, R 没有非零的幂零元, 再由引理 2, R 同构于一组无零因子环的亚直和, 故不妨设R 就是无零因子环. 由引理 1 的等式可知, 对任意$x,y\in R$,

$$x^ny^{n+1}x=yx^{n+1}y^n,$$

于是对任意$a\ne 0$, $b\in R$, 存在$a_1\ne 0$, $b_1\in R$, 使得$b_1a=a_1b$, 即R 满足Ore 条件, 从而R 可嵌入体中, 由引理 3, R 是可换环.

定理 3 的证明 首先证明满足定理 3 的条件的半质环没有非零的幂零元.

设$a\in R$, $a^2=0$, 任取$r\in R$, 令$x=a$, $y=r$, 由定理 3 的条件知有正整数$n=n(x,y)\le l$, 使$(xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1}\in Z(R)$, 因为$a^2=0$, 所以$(ar)^{n+1}\in Z(R)$. 从而

$$(ar)^{n+2}=0.$$

由R 的半质性, $a=0$. 故R 无非零的零因子. 由引理 2, 不妨设R 是无零因子环.

由定理 3 的已知条件, 对任意$x,y\in R$, 有

$$(xy)((xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1})=((xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1})(xy),$$

化简后得$xyx^{n+1}y^{n+1}=x^{n+1}y^{n+1}xy$, 两边消去$x,y$ 后, 有$x^ny^{n+1}x=yx^{n+1}y^n$, 此即

$$[x^ny^n,yx]=0,\quad \forall x,y\in R.$$

由引理 4, R 是可换环. □

文献[3]中作为其定理 3 的一个推论, 有如下结果:

设R 是半质环, l 是一固定的正整数. 若对任意$x,y\in R$, 有小于 l 的正整数$n=n(x,y)$, 使$(xy)^k-y^kx^k\in Z(R)$, $k=n,n+1,n+2$, 则R 必为交换环.

这一结果当然也可以改进为本文定理 3 的推论的.

推论 设R 为半质环, l 为固定的正整数. 若对任意$x,y\in R$, 有小于 l 的正整数$n=n(x,y)$, 使得$(xy)^n-y^nx^n\in Z(R)$, 则R 必为交换环.

证明 参照定理 3 的证明可知满足推论条件的半质环没有非零的幂零元, 由引理 2 不妨设R 是无零因子环.

由已知条件, 对任意$x,y\in R$,

$$(xy)((xy)^n-y^nx^n)=((xy)^n-y^nx^n)(xy),$$

化简可得

$$[x^n y^n, yx] = 0,$$

由引理 4 知, R 是可换环.

参 考 文 献

[1] 邱琦章, 满足 $[(xy)^n, (yx)^n] = 0$ 的环, 武汉大学学报(自然科学版), 3(1986), 9-14.

[2] 邱琦章, 半质环的交换性条件, 东北数学, 2: 4(1986), 494-498.

[3] 王崇寿, 环的几个交换性定理, 吉林大学自然科学学报, 4(1985), 36-57.

[4] 刘则毅, 结合环的几个交换性条件, 吉林大学自然科学学报, 1(1986), 44-53.

[5] P. N. Stewart, *Semi-simple Radical classes*, Pacific J. Math., 32(1970), 249-254.

Some Commutativity Theorems on Semiprime Rings

Guo Huaguang

(Guangzhou Teachers' College)

Abstract

In this paper, we prove some commutativity theorems on semiprime rings. These theorems improved some results appeared in references [2] and [3].

Keywords semiprime rings, commutativity, commutator, nilpotent elements