第17卷第3期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 3
1997年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1997

球面型空间中的度量平均*

郭曙光
(盐城师专数学系, 江苏224002)

摘 要 本文首先建立球面型空间中度量平均的概念, 其次讨论度量平均过程中一些几何不变量之间的关系, 最后举例说明度量平均在解决球面型空间中几何极值问题时的应用.

关键词 球面型空间, 度量平均, 几何极值
分类号 AMS(1991) 51K05/CCL O184

1 引 言

R. Alexander 在文[1, 2]中引入了希尔伯特空间(含欧氏空间)中度量平均的概念, 并以大量的例子说明了度量平均的方法在解决某些几何极值问题时是卓有成效的. 杨路、张景中在文[3, 4]中对希尔伯特空间中的度量平均又做了深入的研究, 使度量平均方法在解决某些几何极值问题时更为有效.

本文在球面型空间做了相应的工作, 试图建立球面型空间中度量平均的基本理论, 首先引进球面型空间中度量平均的概念, 其次讨论度量平均过程中一些几何不变量的变化关系, 最后举例说明度量平均在解决球面型空间中几何极值问题时的应用.

专著[5]是距离几何之经典, 文中将直接引用其中的一些结论, 恕不一一列出.

2 球面型空间中度量平均的概念

S^{d-1} 记曲率为 $K(>0)$ 的 $d-1$ 维球面型空间, 对于 $x\in S^{d-1}, y\in S^{d-1}$, $g(x,y)$ 记 x,y 间的距离, 对 S^{d-1} 中的点列 $\beta=\{p_1,p_2,\cdots,p_d\}$, 简记 $\cos(\sqrt{K}g(p_i,p_j))$ 为 $p_{ij}(1\le i,j\le d)$, 并类似可得下面 $\beta(t)$ 的简记符号.

定理1 设 $\beta(t)=\{p_1(t),p_2(t),\cdots,p_d(t)\}$, $t\in T$ 为 S^{d-1} 中点列构成的单参数族, μ 为 T 的子集上的概率测度, 则 S^{d-1} 中存在点列 $\beta=\{p_1,p_2,\cdots,p_d\}$ 使得

$$\cos(\sqrt{K}g(p_i,p_j))=\int\cos(\sqrt{K}g(p_i(t),p_j(t)))d\mu(t)\quad(1\le i,j\le d).$$

证明 取集合 $\beta=\{p_1,p_2,\cdots,p_d\}$, 定义 $\beta\times\beta$ 上的函数

* 1994年12月9日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\bar{g}(p_i, p_j) = \frac{1}{\sqrt{K}}\arccos\int p_{ij}(t)\,d\mu(t)\ (1 \le i, j \le d).$$

由 $\beta(t)$ 为 S^{d-1} 中的点列易知, β 关于 $\bar{g}$ 作成半度量空间, $\cos(\sqrt{K}\,\bar{g}(p_i, p_j)) = \int p_{ij}(t)\,d\mu(t)$, 由[5]中定理 63.1 的推论, 二次型 $Q_t(x) = \sum_{1\le i,j\le d} p_{ij}(t)x_ix_j$ ($x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, $t \in T$) 是半正定的, 从而, 二次型

$$Q(x) = \sum_{1\le i,j\le d}(\cos(\sqrt{K}\,\bar{g}(p_i, p_j)))x_ix_j = \sum_{1\le i,j\le d}\int p_{ij}(t)\,d\mu(t)x_ix_j$$
$$= \int\sum_{1\le i,j\le d} p_{ij}(t)x_ix_j\,d\mu(t)$$

是半正定的, 即矩阵 $(\cos(\sqrt{K}\,\bar{g}(p_i, p_j)))_{i,j=1}^{d}$ 是半正定的. 由文[5], 半度量空间 $(\beta, \bar{g})$ 可等距嵌入到 S^{d-1} 中, 即 S^{d-1} 中存在点列, 不妨仍记为 $\beta = \{p_1, p_2, \cdots, p_d\}$ 使得

$$\cos(\sqrt{K}\,\bar{g}(p_i, p_j)) = \int\cos(\sqrt{K}\,g(p_i(t), p_j(t)))\,d\mu(t)\ \ (1 \le i, j \le d).$$

显然, 定理 1 中的点列 β 在等距同构意义下是唯一的, 称点列 β 为点列单参数族 $\beta(t)$, $t \in T$ 的度量平均, 特别地, 若对任意 $t \in T$, $\beta(t)$ 为 S^{d-1} 中非退化单形的顶点集, 由定理 1 的证明, β 亦为非退化单形的顶点集, 为方便起见, 也用 $\beta(t)$, β 表示以它们为顶点集的单形, 并约定文中 $\beta = \int\beta(t)\,d\mu(t)$ 表示在定理 1 意义下的度量平均.

定理 2 设 $(Y, \mathbf{T})$ 为一个可同胚嵌入到 S^{d-1} 中的紧致拓扑空间, $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ 为 $(Y, \mathbf{T})$ 到 S^{d-1} 中的一族同胚嵌入映射, $Y_i = t_i(Y)$ ($i = 1, 2, \cdots, k$), μ 为 T 的子集上的概率测度, 对任意 $a, b \in Y$, 定义函数

$$\bar{g}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{K}}\arccos\left(\sum_{l=1}^{K}\mu(t_l)\cos(\sqrt{K}\,g(t_l(a), t_l(b)))\right),$$

则半度量空间 $(Y, \bar{g})$ 可合同嵌入 S^{dk-1} 中, 且与 $(Y, \mathbf{T})$ 同胚.

证明 由 Y_i ($i = 1, 2, \cdots, k$) 为 S^{d-1} 中的点集易知, $(Y, \bar{g})$ 为半度量空间, 在其中任取 $dk + 2$ 个点 $p_1, p_2, \cdots, p_{dk+2}$, 则 $\{t_l(p_1), t_l(p_2), \cdots, t_l(p_{dk+2})\} \subseteq Y_l \subseteq S^{d-1}$ ($l = 1, 2, \cdots, k$). 由文[5]知, 矩阵 $(\cos(\sqrt{K}\,g(t_l(p_i), t_l(p_j)))_{i,j=1}^{dk+2}$ 为秩不超过 d 的半正定矩阵, 从而矩阵

$$(\cos(\sqrt{K}\,\bar{g}(p_i, p_j)))_{i,j=1}^{dk+2} = \left(\sum_{l=1}^{K}\mu(t_l)\cos(\sqrt{K}\,g(t_l(p_i), t_l(p_j)))\right)_{i,j=1}^{dk+2}$$
$$= \left(\sum_{l=1}^{K}\mu(t_l)(\cos\sqrt{K}\,g(t_l(p_i), t_l(p_j)))\right)_{i,j=1}^{dk+2}$$

为秩不超过 dk 的半正定矩阵, 进而半度量空间 $\{p_1, p_2, \cdots, p_{dk+2}\}$ 可合同嵌入 S^{dk-1} 中, 又由文[5]中定理 39.2 知, S^{dk-1} 具有合同指数 $(dk + 2, 0)$, 故 $(Y, \bar{g})$ 可合同嵌入 S^{dk-1} 中.

对于 $(Y, \mathbf{T})$ 中任一收敛点列 $\{y_n\}$, 容易看出, y_n 收敛于 y_0 当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\bar{g}(y_n, y_0) = 0$, 从而度量空间 $(Y, \bar{g})$ 与 $(Y, \mathbf{T})$ 同胚.

显然, $(Y, \bar{g})$ 的在 S^{dk-1} 中的合同象在等距同构意义下也是唯一确定的, 称之为 Y_i ($i = 1, 2, \cdots, k$) 的度量平均, 简记为 $Y = \sum_{i=1}^{k}\mu(t_i)Y_i$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

3　度量平均中一些几何不变量的变化关系

与文[2]相对应, 可以讨论球面型空间度量平均过程中单形的外接球半径, 高线长和点集的覆盖半径等几何不变量的变化关系, 限于篇幅, 仅就点集的覆盖半径加以讨论, 为此, 先列出文[6]中的两个主要结果

引理 1　设 $\beta = \{p_1, p_2, \cdots, p_l\}$ 为 S^{d-1} 中覆盖半径 $\rho < \pi/(2\sqrt{K})$ 的点集, 则二次型

$$Q(x) = \sum_{1\le i,j\le l} p_{ij}x_ix_j,\quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_l) \in \mathbf{R}^l$$

在条件 $S: x_i \ge 0\,(i = 1, 2, \cdots, l)$, $\sum_{i=1}^{l} x_i = 1$ 之下的最小值 $\min_S\left(\sum_{1\le i,j\le l} p_{ij}x_ix_j\right) = \cos^2(\sqrt{K}\rho)$.

引理 2　设 Y 为 S^{d-1} 中覆盖半径 $\rho < \pi/(2\sqrt{K})$ 的紧致集, μ 为 Y 上的一个Borel带号测度[7], 则能量积分[8] $Q(\mu) = \iint_{Y\times Y}\cos(\sqrt{K}g(x,y))\,d\mu(x)\,d\mu(y)$ 在约束条件 $S: \mu$ 非负且 $\int d\mu(y) = 1$ 之下, 在某一分布 μ^* 取最小值为 $Q(\mu^*) = \cos^2(\sqrt{K}\rho)$.

定理 3　设 $\beta = \int \beta(t)\,d\mu(t)$, $\beta(t)$ 的覆盖半径小于 $\pi/(2\sqrt{K})$, $\rho(t)$, ρ 分别表示 $\beta(t)$, β 的覆盖半径, 则

$$\cos^2(\sqrt{K}\rho) \ge \int \cos^2(\sqrt{K}\rho(t))\,d\mu(t).$$

证明　由引理 1 得

$$\begin{aligned}\cos^2(\sqrt{K}\rho) &= \min_S\left(\sum_{1\le i,j\le d} p_{ij}x_ix_j\right) = \min_S\left(\sum_{1\le i,j\le d}\int p_{ij}(t)\,d\mu(t)\,x_ix_j\right)\\ &= \min_S\int\sum_{1\le i,j\le d}(p_{ij}(t)x_ix_j)\,d\mu(t)\\ &\ge \int\min_S\left(\sum_{1\le i,j\le d} p_{ij}(t)x_ix_j\right)d\mu(t) = \int\cos^2(\sqrt{K}\rho(t))\,d\mu(t).\end{aligned}$$

定理 4　设 $Y = \sum_{i=1}^{k}\mu(t_i)Y_i$, Y_i 的覆盖半径小于 $\pi/2\sqrt{K}\,(i = 1, 2, \cdots, k)$, 记 Y, Y_i 的覆盖半径分别为 ρ, ρ_i, 则 $\cos^2(\sqrt{K}\rho) \ge \sum_{i=1}^{k}\mu(t_i)\cos^2(\sqrt{K}\rho_i)$.

证明　设 $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_i\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ 分别为 Y, $Y_i\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ 上的Borel集, $\mathcal{Y}$ 为 $\mathbf{B}$ 上的一个Borel测度, 易见 $t_i\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ 为 Y 到 Y_i 上的可测同构映照[10], 对于任意的 $E \in \mathbf{B}_i\,(i = 1, 2, \cdots, k)$, 定义 $\mathcal{Y}_i(E) = \mathcal{Y}(t_i^{-1}(E))$, 显然 $\mathcal{Y}_i\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ 也是 Y_i 上的一个Borel测度, 并且, 有

$$\iint_{Y\times Y}\cos(\sqrt{K}\,\overline{g}(x,y))\,d\mathcal{Y}(x)\,d\mathcal{Y}(y) = \iint_{Y_i\times Y_i}\cos(\sqrt{K}g(t_i(x), t_i(y)))\,d\mathcal{Y}_i(t_i(x))\,d\mathcal{Y}_i(t_i(y)),$$

若 $\mathcal{Y}$ 满足引理 2 中条件 S, 显然 $\mathcal{Y}_i$ 也满足条件 S, 由引理 2 得

$$\begin{aligned}\cos^2(\sqrt{K}\rho) &= \min_S\left(\iint_{Y\times Y}\cos(\sqrt{K}\,\overline{g}(x,y))\,d\mathcal{Y}(x)\,d\mathcal{Y}(y)\right)\\ &= \min_S\iint_{Y\times Y}\sum_{i=1}^{k}\mu(t_i)\cos(\sqrt{K}g(t_i(x), t_i(y)))\,d\mathcal{Y}(x)\,d\mathcal{Y}(y)\end{aligned}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$$\geq \sum_{i=1}^{k} \mu(t_i) \min_{S} \iint_{Y_i \times Y_i} \cos(\sqrt{K}\, g(t_i(x), t_i(y)))\, d\gamma_i(t_i(x))\, d\gamma_i(t_i(y))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mu(t_i) \cos^2(\sqrt{K}\, \rho_i).$$

S^{d-1} 中有限点集 $\beta = \{p_1, p_2, \cdots, p_\alpha\}$ 的 Cayley-Menger 矩阵的行列式是一个极其重要的几何不变量, 点集 β 的许多几何不变量均可通过它来表示, 例如单形的外接球半径[6], 单形的高线长等. 下面给出度量平均中这个几何不变量的变化关系.

定理 5 设 $\beta = \int \beta(t)\, d\mu(t)$, B, $B(t)$ 分别记 β, $\beta(t)$ 的 Cayley-Menger 矩阵, $|B|$, $|B(t)|$ 分别记 B, $B(t)$ 的行列式, 则 $|B|^{1/d} \geq \int |B(t)|^{1/d} d\mu(t)$.

证明 首先对 $\beta = \alpha_1 \beta(1) + \alpha_2 \beta(2)$ $(\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ 进行证明, 由度量平均的概念, $p_{ij} = \alpha_1 p_{ij}(1) + \alpha_2 p_{ij}(2)$, 其中 $p_{ij}(1) = \cos(\sqrt{K}\, g(p_i(1), p_j(1)))$, $p_{ij}(2) = \cos(\sqrt{K}\, g(p_i(2), p_j(2)))$, 若 $\beta(1)$, $\beta(2)$ 都是 S^{d-1} 中非退化单形的顶点集, 则矩阵 $(p_{ij}(1))_{i,j=1}^{d}$, $(p_{ij}(2))_{i,j=1}^{d}$ 均为正定的, 故下列关于 λ 的多项式

$$\left|(\alpha_1 p_{ij}(1) + \lambda \alpha_2 p_{ij}(2))_{i,j=1}^{d}\right| = C_0 \lambda^d + C_1 \lambda^{d-1} + \cdots + C_{d-1}\lambda + C_d \tag{1}$$

中的系数 $C_0, C_1, \cdots, C_d$ 均为正的, 此多项式的根 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, d)$ 均为负的, 对 $1 \leq k \leq d$, 有

$$\sigma_k(-\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_d) = C_k / C_0,$$

其中 $\sigma_k(-\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_d)$ 为正数 $-\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_d$ 的 k 次初等对称多项式. 由 Maclaurin 不等式[9] 得

$$\frac{C_1}{\binom{d}{1} C_0} \geq \left(\frac{C_2}{\binom{d}{2} C_0}\right)^{1/2} \geq \left(\frac{C_3}{\binom{d}{3} C_0}\right)^{1/3} \geq \cdots \geq \left(\frac{C_d}{C_0}\right)^{1/d},$$

其中 $\binom{d}{k}$ 表示组合数. 由上式可得

$$C_k \geq \binom{d}{k} C_d^{k/d} C_0^{1-k/d} \quad (k = 0, 1, \cdots, d).$$

而由 (1) 式左端易得

$$C_0 = \left|(\alpha_2 p_{ij}(2))_{i,j=1}^{d}\right| = \alpha_2^d \left|(p_{ij}(2))_{i,j=1}^{d}\right| = \alpha_2^d |B(2)|,$$

$$C_d = \left|(\alpha_1 p_{ij}(1))_{i,j=1}^{d}\right| = \alpha_1^d \left|(p_{ij}(1))_{i,j=1}^{d}\right| = \alpha_1^d |B(1)|.$$

又在 (1) 式中令 $\lambda = 1$ 得

$$|B| = \left|(p_{ij})_{i,j=1}^{d}\right| = \left|(\alpha_1 p_{ij}(1) + \alpha_2 p_{ij}(2))_{i,j=1}^{d}\right| = \sum_{k=0}^{d} C_k$$

$$\geq \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} C_d^{k/d} C_0^{1-k/d} = (C_0^{1/d} + C_d^{1/d})^d = (\alpha_1 |B(1)|^{1/d} + \alpha_2 |B(2)|^{1/d})^d,$$

即有 $|B|^{1/d} \geq \alpha_1 |B(1)|^{1/d} + \alpha_2 |B(2)|^{1/d}$.

若 $\beta(1)$ 或 $\beta(2)$ 不是非退化单形的顶点集时, 由于 $|B| = \left|(\cos(\sqrt{K}\, g(p_i, p_j)))_{i,j=1}^{d}\right|$ 为点 $p_1, p_2, \cdots, p_d$ 的连续函数, 通过一般的极限过程就可以得到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$|B|^{1/d} \geq \alpha_1 |B(1)|^{1/d} + \alpha_2 |B(2)|^{1/d},$$

并可以推出对 $\beta = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta(i)$ ($\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$), 仍有 $|B|^{1/d} \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |B(i)|^{1/d}$.

再通过一般的积分极限过程就可得到, 对于 $\beta = \int \beta(t) d\mu(t)$, 有

$$|B|^{1/d} \geq \int |B(t)|^{1/d} d\mu(t).$$

4 度量平均的应用举例

为了说明度量平均在解决 S^{d-1} 中几何极值问题时的应用, 给出如下的一个例子.

定理 6 设 S^{d-1} 中单形 $\beta = \{p_1, p_2, \cdots, p_d\}$ 的覆盖球半径为 ρ, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq d} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\, g(p_i, p_j)\right) \leq \frac{d\sqrt{2d(d-1)}}{4} \sin(\sqrt{K}\rho) < \frac{d\sqrt{2d(d-1)}}{4},$$

当 β 为正则单形时不等式中等号成立, 且右边的上界是最好的.

证明 考虑单形 $\beta = \{p_1, p_2, \cdots, p_d\}$ 顶点集的所有排列 $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_d}\}$ 的一致度量平均 $\Omega = \{q_1, q_2, \cdots, q_d\}$, 所谓"一致", 是指每个排列的概率测度均为 $1/d!$, 则 Ω 为非退化单形, 且

$$\cos(\sqrt{K}\, g(q_i, q_j)) = \frac{2}{d(d-1)} \sum_{1 \leq k < l \leq d} \cos(\sqrt{K}\, g(p_k, p_l)) \quad (1 \leq i < j \leq d), \tag{2}$$

由引可得 Ω 为 S^{d-1} 中的正则单形, 并且上式可化为

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\, g(q_i, q_j)\right) &= \frac{2}{d(d-1)} \sum_{1 \leq k < l \leq d} \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\, g(p_k, p_l)\right) \\
&\geq \left(\frac{2}{d(d-1)}\right)^2 \left(\sum_{1 \leq k < l \leq d} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{k}\, g(p_k, p_l)\right)\right)^2, \\
&\sum_{1 \leq k < l \leq d} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\, g(p_k, p_l)\right) \\
&\leq \frac{d(d-1)}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\, g(q_i, q_j)\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

由文[6]中引理 7 可知, 正则单形 Ω 的外接球半径和覆盖半径相同, 设为 R_Ω, 由定理 3, $\cos^2(\sqrt{K} R_\Omega) \geq \cos^2(\sqrt{K}\rho)$, 进而, $R_\Omega \leq \rho$. 以单形 Ω 的外接球心 O 为球心, 以 ρ 为半径作球, 射线 $Oq_i (i = 1, 2, \cdots, d)$ 交所作球于 q_i', 则单形 $\Omega' = \{q_1', q_2', \cdots, q_d'\}$ 仍为正则单形, 且 $\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{k}\, g(q_i', q_j')\right) \geq \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\, g(q_i, q_j)\right)$, Ω' 的外接球半径为 ρ.

文[6]引理 5 证明中给出了 S^{d-1} 中单形 $\beta = \{p_1, p_2, \cdots, p_d\}$ 外接球半径 R 的公式 $\cos^2(\sqrt{K} R) = -\frac{|B|}{|\bar{B}|}$, 其中 B 为 β 的 Cayley-Menger 矩阵, $\bar{B}$ 为镶边矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & B & \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$,

利用这个公式, 不难得到正则单形 Ω' 的外接球半径 ρ 同棱长 $g(q_i', q_j')$ 的关系式

$$\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\, g(q_i', q_j')\right) = \sqrt{\frac{d}{2(d-1)}} \sin(\sqrt{K}\rho)$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

从而

$$\sum_{1\le k<l\le d}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\,g(p_k,p_l)\right)\le\frac{d(d-1)}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{K}}{2}g(q_i,q_j)\right)$$

$$\le\frac{d(d-1)}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{K}\,g(q_i',q_j')\right),$$

$$=\frac{d\sqrt{2d(d-1)}}{4}\sin(\sqrt{K}\rho)<\frac{d\sqrt{2d(d-1)}}{4}.$$

当 β 为正则单形时, (3) 式等号成立, 并且由(2) 可知, β, Ω, Ω' 均合同, 从而必有上式等号成立. 又由于正则单形的外接球半径可无限趋于 $\pi/2\sqrt{K}$, 故上式右端的上界是最好的.

本文是作者的硕士学位论文的一部分, 作者衷心感谢导师蒋声教授的指导和鼓励.

参 考 文 献

[1] R. Alexander, *Metric embedding techniques applied to geometric inequalities*, Lecture Notes in Math. No. 490, The Geometry of Metric and Linear Space, Spring-Verlag, 1975, 57-65.

[2] R. Alexander, *Metric averaging in Euclidean and Hilbert space*, Pac. J. Math., 85: 1(1979), 1-9.

[3] 杨路、张景中, 度量和与 Alexander 对称化, 数学年刊, 8A: 2(1987), 242-253.

[4] 杨路、张景中, 关于 Alexander 的一个猜想, 科学通报, 27: 7(1982), 699-703.

[5] L. M. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry*, 2nd. ed, New York, 1970.

[6] 郭曙光, 球面型空间中点集的覆盖半径, 扬州师范学院学报(自), 14: 2(1994), 11-16.

[7] P. R. Halmos, *Measure theory*, D. Van. Nostrand, New York, 1950.

[8] R. Alexander and K. B. Stolarsky, *Extremal problem of distance geometry related to energy integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 193(1974), 1-31.

[9] G. H. Hardy 等, 不等式, 科学出版社, 1965, 53—57.

[10] 夏道行等, 实变函数与泛函分析(第二版), 高等教育出版社. 1985.

Metric Averaging in Spherical Space

Guo Shuguang

(Yancheng Teachers' College, Jiangsu 224002)

Abstract

In this paper, we first establish the concept of metric averaging in spherical space, and then discuss relations among some geometrical invariants in the process of metric averaging. Finally, we gave an example to show the applications of metric averaging in solving geometric extremal problem in spherical space.

Keywords spherical space, metric averaging, geometric extreme value.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.