第17卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 17 No. 3
1997年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1997

法联络平坦子流形与第二基本张量*

舒　世　昌
(咸阳师专数学系, 陕西712000)

摘　要　本文首先将常曲率黎曼流形中B. Y. Chen 和M. Okumura 关于数量曲率和截面曲率关系间的一个著名不等式推广到环绕空间是局部对称共形平坦黎曼流形的情形. 作为应用, 较简捷地将M. Okumura 在[2], [3]中的结果推广到这种环绕空间中法联络是平坦的子流形上去.

关键词　子流形, 局部对称, 共形平坦
分类号　AMS(1991) 53C42/CCL O186

1　引　言

设N 是常曲率为a 的$n+p$ 维黎曼流形,M 是浸入N 的n 维子流形. B. Y. Chen 和M. Okumura 在[1]中曾证得: 如果M 的数量曲率在M 上P 点满足

$$R \geq (n-2)S + (n-1)(n-2)a + 2(n-1)c,$$

那么在P 点M 的截面曲率$K_c \geq c$.

当考虑环绕空间是局部对称共形平坦黎曼流形时, 将上述结果推广为:

定理1　设N^{n+p} 是$n+p$ 维局部对称共形平坦黎曼流形,M 是N^{n+p} 的n 维子流形. 若M 的数量曲率在M 上P 点满足

$$R \geq (n-2)S + \frac{(n-1)(n-2)}{n+p-2}\left(2T_c - \frac{K}{n+p-1}\right) + 2(n-1)C,$$

则在P 点M 的截面曲率$K_c \geq C$, 其中T_c, t_c 分别是N^{n+p} 的Ricci曲率在P 点的上下确界, K 是N^{n+p} 在P 点的数量曲率, S 是M 的第二基本形长度平方, $S=\sum_{ij\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2$.

M. Okumura 在[2], [3]中曾得到:

定理A[2]　设M 是浸入在具非负常曲率a 的$n+1$ 维黎曼流形的完备、连通具常中曲率的超曲面. 若M 的第二基本张量的长度是常数, 且

$$\mathrm{trace}A^2 < \frac{1}{n-1}(\mathrm{trace}A)^2 + 2a$$

成立, 则M 是全脐超曲面, 因而是一个球面. A 是M 的第二基本张量.

定理B[3]　设M 是浸入在具非负常曲率a 的$n+p$ 维黎曼流形N 的具平行中曲率向量的

* 1994年9月6日收到. 陕西省教委自然科学基金资助项目.

n 维子流形. 假定 M 在 N 中的法联络是平坦的. 若 M 上的函数 $f = \sum_{\alpha} \mathrm{trace} A_{\alpha}^2$ 是常数, 且

$$\sum_{\alpha} \mathrm{trace} A_{\alpha}^2 < \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha} (\mathrm{trace} A_{\alpha})^2$$

成立, 则 M 是全脐子流形, 其中 A_{α} 是 M 关于法向量 e_{α} 的第二基本张量.

本文试图将上述定理推广到浸入在局部对称共形平坦黎曼流形中具有任意余维数的子流形上去. 得到

定理 2 设 N^{n+p} 是 $n+p$ 维局部对称共形平坦黎曼流形, M 是浸入在 N^{n+p} 的具有平行中曲率向量的 n 维子流形. 假定 M 在 N^{n+p} 中的法联络是平坦的, 若 M 上的函数 $f = \sum_{\alpha} \mathrm{trace} A_{\alpha}^2$ 是常数, 且

$$\sum_{\alpha} \mathrm{trace} A_{\alpha}^2 < \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha} (\mathrm{trace} A_{\alpha})^2 + \frac{2}{n+p-2}\left(2T_c - \frac{K}{n+p-1}\right)$$

成立, 则 M 是全脐子流形.

若 M 是 N^{n+p} 中的紧致子流形, 还可以得到

定理 3 设 N^{n+p} 是 $n+p$ 维局部对称共形平坦的黎曼流形, M 是浸入 N^{n+p} 的具有平行中曲率向量的 n 维紧致子流形, 假定 M 在 N^{n+p} 中的法联络是平坦的, 且

$$\sum_{\alpha} \mathrm{trace} A_{\alpha}^2 < \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha} (\mathrm{trace} A_{\alpha})^2 + \frac{2}{n+p-2}\left(2T_c - \frac{K}{n+p-1}\right)$$

成立, 则 M 是全脐子流形.

2 基本公式

选取 N^{n+p} 的正交标架场 $e_1, \cdots, e_{n+p}$. 使限制在 M 上 $e_1, \cdots, e_n$ 切于 M. $e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$ 是 M 的法向量场. 记 $\omega_1, \cdots, \omega_{n+p}$ 为对偶标架场. 约定指标

$$1 \le A, B, C, \cdots \le n+p;\ 1 \le i, j, k, \cdots \le n;\ n+1 \le \alpha, \beta, \gamma, \cdots \le n+p.$$

N^{n+p} 的结构方程为:

$$d\omega_A = -\sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B,\quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0.$$

$$d\omega_{AB} = -\sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \Omega_{AB},\ \Omega_{AB} = \frac{1}{2}\sum_{C,D} K_{ABCD}\,\omega_C \wedge \omega_D, \tag{2.1}$$

$$K_{ABCD} = \frac{1}{n+p-2}\{\delta_{AC}K_{BD} - \delta_{AD}K_{BC} + \delta_{BD}K_{AC} - \delta_{BC}K_{AD} + \frac{K}{n+p-1}(\delta_{AD}\delta_{BC} - \delta_{AC}\delta_{BD})\}, \tag{2.2}$$

$$K_{AB} = \sum_C K_{ACBC},\quad K = \sum_A K_{AA}. \tag{2.3}$$

因为 N^{n+p} 局部对称, 故 K 为常数, 限制在 M 上有

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^{\alpha}\omega_j,\ h_{ij}^{\alpha} = h_{ji}^{\alpha},\ R_{ijkl} = K_{ijkl} + \sum_{\alpha}(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}). \tag{2.4}$$

这里 R_{ijkl} 是 M 的黎曼张量的分量. M 的平均曲率向量是

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i\alpha} h_{ii}^{\alpha} e_{\alpha} \tag{2.5}$$

M 的第二基本形长度平方 $S = \sum_{ij\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2$. 记 M 的第二基本张量为 $\{h_{ij}^{\alpha}\}$. 定义 h_{ij}^{α} 的第一阶协变

导数为满足下式的 h^{α}_{ijk}

$$\sum_k h^{\alpha}_{ijk}\omega_k = dh^{\alpha}_{ij} - \sum_k h^{\alpha}_{ik}\omega_{jk} - \sum_k h^{\alpha}_{kj}\omega_{ik} + \sum_\beta h^{\beta}_{ij}\omega_{\beta\alpha}, \tag{2.6}$$

易得

$$h^{\alpha}_{ijk} = h^{\alpha}_{ikj}. \tag{2.7}$$

进一步, 定义 h^{α}_{ij} 的第二阶协变导数 h^{α}_{ijkl}

$$\sum_k h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l = dh^{\alpha}_{ijk} - \sum_l h^{\alpha}_{ljk}\omega_{il} - \sum_l h^{\alpha}_{ilk}\omega_{jl} - \sum_l h^{\alpha}_{ijl}\omega_{kl} + \sum_\beta h^{\beta}_{ijk}\omega_{\beta\alpha}, \tag{2.8}$$

h^{α}_{ij} 的 Laplace 定义为

$$\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_k h^{\alpha}_{ijkk}. \tag{2.9}$$

3 定理的证明

在[1]中有如下引理

引理 设 $a_1, \cdots, a_n, b$ 是 $n+1(n\geq 2)$ 个实数, 满足 $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \geq (n-1)\sum_{i=1}^n a_i^2 + b$, 则对任意 $i, j(i\neq j)$ 有 $2a_ia_j \geq \dfrac{b}{n-1}$.

由(2.2), (2.4)得

$$R_{ijij} = \sum_\alpha [h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj} - (h^{\alpha}_{ij})^2] + \frac{1}{n+p-2}\left(K_{ii} + K_{jj} - \frac{K}{n+p-1}\right) \quad (i\neq j), \tag{3.1}$$

$$R = \sum_{ij} R_{ijij} = n^2\|H\|^2 - S + \frac{2(n-1)}{n+p-2}\sum_i K_{ii} - \frac{n(n-1)K}{(n+p-1)(n+p-2)}. \tag{3.2}$$

取平均曲率方向为 e_{n+1} 的方向 记 $h_{ij} = h^{n+1}_{ij}$. 则

$$S = \sum_{ij\alpha}(h^{\alpha}_{ij})^2 = \sum_i h^2_{ii} + \sum_{i\neq j} h^2_{ij} + \sum_{ij\alpha\geq n+2}(h^{\alpha}_{ij})^2, \tag{3.3}$$

$$n^2\|H\|^2 = (\sum_i h_{ii})^2. \tag{3.4}$$

把(3.2)代入定理1中不等式得

$$\begin{aligned} n^2\|H\|^2 \geq{}& (n-1)S + \frac{2(n-1)(n-2)}{n+p-2}T_c - \frac{2(n-1)}{n+p-2}\sum_i K_{ii} \\ &+ \frac{2(n-1)K}{(n+p-1)(n+p-2)} + 2(n-1)C, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$(\sum_{i=1}^n h_{ii})^2 \geq (n-1)\sum_i h^2_{ii} + (n-1)\sum_{i\neq j} h^2_{ij} + (n-1)\sum_{ij,\alpha\geq n+2}(h^{\alpha}_{ij})^2 + B. \tag{3.6}$$

这里记

$$\begin{aligned} B ={}& \frac{2(n-1)(n-2)}{n+p-2}T_c - \frac{2(n-1)}{n+p-2}\sum_i K_{ii} \\ &+ \frac{2(n-1)K}{(n+p-1)(n+p-2)} + 2(n-1)C. \end{aligned}$$

把引理应用到(3.6) 得:

$$2h_{ii}h_{jj} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij})^2 + \sum_{ij,\alpha\geq n+2}(h^{\alpha}_{ij})^2 + \frac{B}{n-1}$$

$$\geq 2(h_{ij})^2+\sum_{\alpha\geq n+2}[(h_{ii}^\alpha)^2+(h_{jj}^\alpha)^2+2(h_{ij}^\alpha)^2]+\frac{B}{n-1}$$

$$2h_{ii}h_{jj}-2(h_{ij})^2\geq\sum_{\alpha\geq n+2}[(h_{ii}^\alpha)^2+(h_{jj}^\alpha)^2+2(h_{ij}^\alpha)^2]+\frac{B}{n-1}$$

$$\geq 2\sum_{\alpha\geq n+2}[|h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha|+(h_{ij}^\alpha)^2]+\frac{B}{n-1}.$$

上述不等式两边同时加上 $2\sum_{\alpha\geq n+2}[h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha-(h_{ij}^\alpha)^2]$, 则

$$2\sum_{\alpha\geq n+1}[h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha-(h_{ij}^\alpha)^2]\geq 2\sum_{\alpha\geq n+2}[|h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha|+h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha]+\frac{B}{n-1}\geq\frac{B}{n-1}.$$

由(3.1) $R_{ijij}\geq\frac{B}{2(n-1)}+\frac{1}{n+p-2}(K_{ii}+K_{jj}-\frac{K}{n+p-1})\ (i\neq j)$.

将 B 值代入得:

$$R_{ijij}\geq\frac{n-2}{n+p-2}T_c-\frac{1}{n+p-2}\sum_i K_{ii}+\frac{K}{(n+p-1)(n+p-2)}$$

$$+C+\frac{1}{n+p-2}(K_{ii}+K_{jj}-\frac{K}{n+p-1})$$

$$=\frac{n-2}{n+p-2}T_c-\frac{1}{n+p-2}(\sum_i K_{ii}-K_{ii}-K_{jj})+C$$

$$=\frac{n-2}{n+p-2}T_c-\frac{1}{n+p-2}\sum_{l\neq i,j}K_{ll}+C$$

$$\geq\frac{n-2}{n+p-2}T_c-\frac{1}{n+p-2}(n-2)T_c+C=C.$$

定理1得证. 此处用了 $K_{ll}\leq T_c$.

注1 当 N^{n+p} 是截面曲率为 a 的 $n+p$ 维常曲率黎曼流形时, 即: $T_c=t_c=(n+p-1)a$, $K=(n+p)(n+p-1)a$. 定理1即为B. Y. Chen 和M. Okumura 在[1]中的结果. 因此成为定理1的推论.

为了证明定理2, 首先证明下面的定理.

定理 设 N^{n+p} 是局部对称共形平坦的 $n+p$ 维黎曼流形, M 是浸入 N^{n+p} 的具有平行中曲率向量的 n 维子流形, 假定 M 在 N^{n+p} 中的法联络是平坦的, 若 M 上的函数 $f=\sum_\alpha \mathrm{trace}A_\alpha^2$ 是常数且 M 的截面曲率 $K_c>0$, 则 M 是全脐子流形.

证明 根据 f 的定义, $f=S=\sum_{ij\alpha}(h_{ij}^\alpha)^2$ 易见

$$\frac{1}{2}\Delta f=\sum_{ijk\alpha}h_{ij}^\alpha h_{ijkk}^\alpha+\sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^\alpha)^2. \tag{3.7}$$

选取 e_{n+1} 为沿着中曲率向量 H 的方向(如果 $H=0$, 可选取一个任意的 e_{n+1}). 那么显然 $\mathrm{trace}A_\alpha=0$, $\alpha=n+2,\cdots,n+p$. 根据定理假设有 $\mathrm{trace}A_{n+1}=$ 常数. 如果 $H=0$, 由(2.6) 和(2.8) 易得

$$\sum_k h_{kkij}^\alpha=0. \tag{3.8}$$

如果 $H\neq 0$. 易知 e_{n+1} 是平行的法向量场, 即 $\omega_{n+1\alpha}=0$. 那么由(2.6) 可得 $\sum_i h_{iik}^\alpha=0$, 因而根据(2.8) 仍有(3.8) 成立, 所以(3.7) 可重新写为

$$\frac{1}{2}\Delta f = \sum_{ijk\alpha} h^{\alpha}_{ij}(h^{\alpha}_{ijkk} - h^{\alpha}_{kkij}) + \sum_{ijk\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2. \tag{3.9}$$

不难看到

$$h^{\alpha}_{ijkk} - h^{\alpha}_{kkij} = h^{\alpha}_{kikj} - h^{\alpha}_{kjkj} = \sum_m h^{\alpha}_{km}R_{imjk} + \sum_m h^{\alpha}_{mi}R_{kmjk} - \sum_\beta h^{\beta}_{ki}R_{\beta\alpha jk}.$$

于是(3.9)可写为:

$$\frac{1}{2}\Delta f = \sum_{ijkm\alpha} h^{\alpha}_{ij}(h^{\alpha}_{km}R_{imjk} + h^{\alpha}_{mi}R_{kmjk}) + \sum_{ijk\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 - \sum_{ijk\alpha\beta} h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ki}R_{\beta\alpha jk}. \tag{3.10}$$

由于法联络是平坦的,所以第二基本张量A_α可同时对角化,即存在n个相互正交的单位向量$e_1\cdots e_n$,使得$h^{\alpha}_{ij} = 0(i \neq j)$于是有$R_{\beta\alpha jk} = 0$,且(3.10)变成

$$\frac{1}{2}\Delta f = \sum_\alpha \sum_{i<k}(h^{\alpha}_{ii} - h^{\alpha}_{kk})^2 R_{kiik} + \sum_{ijk\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2. \tag{3.11}$$

由已知有$R_{kiik} > 0$.所以(3.11)右端各项是非负的.因而当f是常数时,对$\alpha = n+1, \cdots, n+p$和任何一对$i, j$.有$h^{\alpha}_{ii} = h^{\alpha}_{jj}$.这就证明$M$是全脐的.

定理1中当$C = 0$,不等号变为严格大于号时亦成立,即

$$R > (n-2)S + \frac{(n-1)(n-2)}{n+p-2}\left(2T_c - \frac{K}{n+p-1}\right), \tag{3.12}$$

M截面曲率$K_c > 0$.

但把(3.2)代入(3.12),并利用$n^2\|H\|^2 = \sum_\alpha(\mathrm{trace}A_\alpha)^2$,可得(3.12)等价于定理2与定理3中的不等式:

$$\sum_\alpha \mathrm{trace}A^2_\alpha < \frac{1}{n-1}\sum_\alpha(\mathrm{trace}A_\alpha)^2 + \frac{2}{n+p-2}\left(2T_c - \frac{K}{n+p-1}\right). \tag{3.13}$$

因此,当(3.13)成立时,M的截面曲率$K_c > 0$,再利用定理,可直接证得定理2.

如果M是N^{n+p}中的紧致子流形,那么由于(3.11)右端非负,由Hopf引理知f是常数,故由定理2知定理3成立.

注2 当N^{n+p}是截面曲率为a的常曲率黎曼流形,即$T_c = t_c = (n+p-1)a, K = (n+p)(n+p-1)a$时,定理2,定理3变为常曲率空间下的相应结果.且当$a < 0$时,结果推广了M. Okumura在[2],[3]中的结果.当$a \geq 0$时,Pinching常数$\sum_\alpha(\mathrm{trace}A_\alpha)^2/(n-1) + 2a$不小于M. Okumura的常数$\sum_\alpha(\mathrm{trace}A_\alpha)^2/(n-1)$.因此不仅把M. Okumura的结果推广到环绕空间是局部对称共形平坦黎曼流形中去,而且作为推论得到的常曲率空间下的结果推广和改进了M. Okumura的相应结果.上述方法较M. Okumura的方法要简捷得多.

致谢:导师王新民教授阅读了初稿,并提出许多有益的意见和建议,特此致谢.

参 考 文 献

[1] B. Y. Chen and M. Okumura, *Scalar Curvature, inequality and submanifold*, Proc. Amer. Soc., 38(1973), 605-608.

[2] M. Okumura, *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J.

Math., 86(1974), 207-213.
[3] M. Okumura, *Submanifolds and a pinching problem on the second fundamental tensors*, Trans. Amer. Math. Soc., 178: 2(1973), 285-291.

Submanifolds with Flat Connection of Normal Bundle and the Second Fundamental Tensors

Shu Shichang
(Xianyang Teachers' College, Shanxi 712000)

Abstract

An inequality of B. Y. Chen and M. Okumura in constant curvature Riemannian manifold is generalized to submanifold in a locally symmetric and conformally flat Riemannian manifold. As an application, the theorems of M. Okumura in [2], [3] are generalized and improved.

Keywords submanifold, locally symmetric, conformally flat.