第17卷第3期　　　　数学研究与评论　　　　Vol.17 No.3
1997年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1997

经典公理集合论系统与中介公理集合论系统之间的包含关系*

张东摩　　　　肖奚安
(南京航空航天大学计算机系, 210016)　(空军气象学院数学教研室, 南京市)

摘　要　本文首先在中介公理集合论系统MS中构造出Peano自然数系统, 以此为基础重新定义了MS中的良集概念, 证明了新定义的良集满足经典公理集合论系统ZFC$^-$(ZFC中去掉正则公理的集合论系统)的全部公理, 从而说明经典公理集合论系统ZFC$^-$为中介公理集合论系统MS的子系统.

关键词　公理集合论, 中介公理集合论
分类号　AMS(1991) 04/CCL O144

关于中介数学是否包含经典数学的问题曾有过争议. 文[1]曾提出质疑, 文[2]就逻辑的包含关系问题给出了肯定的答复, 说明经典二值逻辑是中介逻辑的子系统. 就中介公理集合论与经典公理集合论的关系问题, 文[3]中曾作过初步阐述, 该文在中介公理集合论系统MS中定义了一种良集的概念, 证明了这样的良集满足与ZFC$^-$(经典公理集合系统ZFC中去掉正则公理得到的集合论系统)的九条公理相类似的九条定理, 从而说明MS中的良集具有某些与经典集合相类似的性质, 但这仍不能充分说明MS包含ZFC(或ZFC$^-$). 本文通过在MS中重新定义良集的概念, 证明了这样的集合完全满足经典公理集合论系统ZFC$^-$的全部公理, 且其配套的逻辑关系恰好为文[2]中构造的中介逻辑的二值子系统, 从而最终回答了中介数学与经典数学的包含关系问题.

本文以文[3]的前四节为基础, 但独立于该文的以后各节.

1　MS中的自然数系统

定义1　在MS中

$$\mathrm{Ind}(x) =_{df} \mathbf{M}(a) \wedge \varnothing \in a \wedge \forall x(x \in a \Rightarrow x^+ \in a),$$

这里$\mathbf{M}$为MS的常谓词, $\mathbf{M}(a)$表示a为小集, 称满足$\mathrm{Ind}(a)$的集合a为归纳集.

引理1　在MS中$\vdash \exists a(\mathrm{Ind}(a) \wedge \forall x(x \in a \Leftrightarrow \forall y(\mathrm{Ind}(y) \Rightarrow x \in y)))$.

定义2　在MS中$\omega(a) =_{df} \mathrm{Ind}(a) \wedge \forall x(x \in a \Leftrightarrow \forall y(\mathrm{Ind}(y) \Rightarrow x \in y)))$.

定义3　在MS中$N(a) =_{df} \exists b(\omega(b) \wedge a \in b)$.

* 1994年12月12日收到. 国家高技术863计划资助

引理2 在MS中$\vdash \forall x(N(x)\Rightarrow \mathrm{dis}(x))$.

定理1 在MS中

1) $\vdash N(\varnothing)$;

2) $\vdash \forall x(N(x)\Rightarrow N(x^{+}))$;

3) $\vdash \forall x(N(x)\Rightarrow(x=\varnothing\vee\exists y(N(y)\wedge x=y^{+})))$;

4) $\vdash \forall x\forall y((N(x)\wedge N(y)\wedge x^{+}=y^{+})\Rightarrow x=y)$;

5) $\vdash \forall x(N(x)\Rightarrow$ 由$(x^{+}=\varnothing))$.

证明 只证4), 其余略.

设$N(x)\wedge N(y)\wedge x^{+}=y^{+}$, 则存在集合$a, b$, 使$x\in a\wedge\omega(a)$及$y\in b\wedge\omega(b)$. 由$\mathrm{Ind}(a)$及$\omega(b)$有$y\in a$. 再由$\mathbf{M}(a)$及文[3]中定理3. 14, 存在下列集合$c=\{z\mid z\in a\wedge\cup z^{+}=z\}$. 因$\cup\varnothing^{+}=\cup(\varnothing\cup\{\varnothing\})=\varnothing$, 故$\varnothing\in c$.

假设$z\in c$, 由引理2及结论2)可知:

$$\cup(z^{+})^{+}=\cup(z^{+}\cup\{z^{+}\})=(\cup z^{+})\cup(\cup\{z^{+}\})=z\cup z^{+}=z\cup(z\cup\{z\})=z\cup\{z\}=z^{+}$$

从而$z^{+}\in c$. 故$\mathrm{Ind}(c)$. 由此得$x\in c$且$y\in c$, 因此$x=\cup x^{+}=\cup y^{+}=y$, 4)得证.

容易看出, 定理1中1) - 5)即为Peano的自然数公理(见[4]). 在MS中, 以此五条性质为公理, 以文[2]中所构造的一阶逻辑系统为配套逻辑, 即可在MS中推出所有自然数性质, 特别地, 在MS中可以证明下文所需的自然数的归纳原理及递归原理等结论.

本文约定用m, n, k表示自然数.

2 ZFC在MS中的实现

定义4 在MS中递归定义下列记号: $\cup^{0}x=_{\mathrm{df}}x$; $\cup^{n+1}x=_{\mathrm{df}}\cup(\cup^{n}x)$.

定义5 在MS中

$$w(x)=_{\mathrm{df}}\mathrm{dis}(x)\wedge\mathbf{M}(x)\wedge\forall n\forall y(y\in\cup^{n}x\Rightarrow\mathrm{dis}(y)\wedge\mathbf{M}(y)),$$

称满足$w(x)$的集合x为良集.

定理2 在MS中$\vdash w(x)\Leftrightarrow\forall y(y\in x\Rightarrow w(y))\wedge\mathrm{dis}(x)\wedge\mathbf{M}(x)$.

证明 “$\Rightarrow$”通过对自然数n施行归纳法, 可以证明对任何$y\in x$及任何自然数n, 下式成立:

$$\forall z(z\in\cup^{n}y\Rightarrow z\in\cup^{n+1}x). \qquad (*)$$

现设$w(x)$, 从而有$\mathrm{dis}(x)\wedge\mathbf{M}(x)$. 任设$y\in x$, 由$w(x)$的定义知$\mathrm{dis}(y)\wedge\mathbf{M}(y)$, 且对任意的自然数$n$及任意集合$z\in\cup^{n}y$, 由(*)可知$z\in\cup^{n+1}x$, 从而$\mathrm{dis}(z)\wedge\mathbf{M}(z)$, 故$w(y)$.

“$\Leftarrow$” 设x满足$\forall y(y\in x\Rightarrow w(y))\wedge\mathrm{dis}(x)\wedge\mathbf{M}(x)$, 通过对$n$施行归纳法可以证明

$$\forall z(z\in\cup^{n}x\Rightarrow w(z)) \qquad (**)$$

从而有

$$\mathrm{dis}(x)\wedge\mathbf{M}(x)\wedge\forall n\forall y(y\in\cup^{n}x\Rightarrow\mathrm{dis}(y)\wedge\mathbf{M}(y)),$$

亦即$w(x)$成立. □

上列定理表明, 本文定义的良集概念不同于文献[3]第五节中定义的良集概念, 前者具有

遗传性, 即

$$w(x)\Rightarrow\forall y(y\in x\Rightarrow w(y)),$$

而后者不具有遗传性 众所周知, 在经典集合论系统 ZFC 中, 任何集合均具有遗传性, 即若 x 为 ZFC 中的集合, 则 x 的所有元素也是 ZFC 中的集合. 下文定理3将指出, 本文定义的良集满足 ZFC^- 的全部公理

为方便起见, 本文约定, 在M S 中凡使 $w(x)$ 成立的集合(即良集)均以希腊小写字母表示

定理3 在M S 中,

1) $\vdash\forall\alpha\forall\beta(\forall\gamma(\gamma\in\alpha\Rightarrow\gamma\in\beta)\Rightarrow\alpha=\beta)$;

2) $\vdash\forall\alpha\forall\beta\exists\gamma\forall\delta(\delta\in\gamma\Leftrightarrow(\delta=\alpha\vee\delta=\beta))$;

3) $\vdash\exists\alpha\forall\beta(\text{由}(\beta\in\alpha))$;

4) $\vdash\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma(\gamma\in\beta\Leftrightarrow\exists\delta(\delta\in\alpha\wedge\gamma\in\delta))$;

5) $\vdash\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma(\gamma\in\beta\Leftrightarrow\forall\delta(\delta\in\gamma\Rightarrow\delta\in\alpha))$;

6) 设 $A(x,y)$ 为只含谓词∈及形式符号由、⇒、∧、∨、∃、∀、= 的合式公式, 则

$$\vdash\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma(A(\alpha,\beta)\wedge A(\alpha,\gamma)\Rightarrow\beta=\gamma)\Rightarrow\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma$$
$$(\gamma\in\beta\Leftrightarrow\exists\delta(\delta\in\alpha\wedge A(\delta,\gamma)));$$

7) $\vdash\exists\alpha(\varnothing\in\alpha\wedge\forall\beta(\beta\in\alpha\Rightarrow\beta^+\in\alpha))$;

8) $\vdash\forall\alpha(\forall\beta\forall\gamma(\beta\in\alpha\wedge\gamma\in\alpha\wedge\text{由}(\beta=\gamma)\Rightarrow\text{由}\exists\delta(\delta\in\beta\wedge\delta\in\gamma))\Rightarrow\exists\delta\forall\eta(\eta\in\alpha\wedge\text{由}(\eta=\varnothing)\Rightarrow\exists!\gamma(\gamma\in\delta\wedge\gamma\in\eta)))$

证明 选证6), 7)

对6), 记 $B(x,y)$ 为下列公式:

$$w(x)\wedge w(y)\wedge A(x,y),$$

由6) 之前提 $\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma(A(\alpha,\beta)\wedge A(\alpha,\gamma)\Rightarrow\beta=\gamma)$, 不难验证 $\mathbf{U}_{\langle x,y\rangle}B(x,y)$ 成立, 从而有 $\mathbf{U}_{\langle x,y\rangle}(B(x,y)\wedge w(y))$, 由M S 中公理 11 可知, 对任何 α, 存在集合 b 满足:

$$\mathbf{M}(b)\wedge b\overset{\text{exa}}{\underset{y}{}}(\exists x(x\in\alpha^0\wedge B(x,y)\wedge w(y))),$$

从而有 $\mathbf{M}(b)$ 且

$$\forall y(y\in b^0\Leftrightarrow\exists x(x\in\alpha\wedge B(x,y)\wedge w(y))),\tag{1}$$

特别地有 $\forall y(y\in b^0\Rightarrow w(y))$, 故

$$w(b^0).\tag{2}$$

对任意 $\gamma\in b^0$, 由(1)及 $w(\alpha)$ 可知, 存在 δ 使 $\delta\in\alpha$ 且 $B(\delta,\gamma)$, 由 $B(x,y)$ 的构造可得 $A(\delta,\gamma)$ 成立

反之, 对任何 γ, 存在 δ, 使 $\delta\in\alpha$ 且 $A(\delta,\gamma)$. 从而 $B(\delta,\gamma)$ 成立, 故由(1)即得 $\gamma\in b^0$.

综上可知

$$\forall\gamma(\gamma\in b^0\Leftrightarrow\exists\delta(\delta\in\alpha\wedge A(\delta,\gamma))).\tag{3}$$

令 $b^0=\beta$, 结合2), 3), 6)得证

对7), 由结论1)及∅在M S 中的定义易证 $\forall\alpha\,\text{由}(\alpha\in\beta)\Rightarrow\beta=\varnothing$, 因此∅亦可以看成是经典公理集合论中的空集 由结论2), 4)可知, 对任何良集 β, $\beta^+=\beta\cup\{\beta\}$ 也为良集, 因此后继集的定义也与经典集合论一致 下证7)成立 由引理1, 存在集合 a, 使 $\omega(a)$. 由 $\mathbf{M}(a)$ 及文献[3]

中定理3. 14知, 存在集合 b, 使$\mathbf{M}(b)$ 且 $b = \{x \mid x \in a \wedge w(x)\}$, 因 $\forall x (x \in b^0 \Rightarrow w(x))$, 故 $w(b^0)$. 不难验证 $\varnothing \in b^0 \wedge \forall \beta(\beta \in b^0 \Rightarrow \beta^+ \in b^0)$. 令 $\alpha = b^0$ 即得所证 □

3 结 论

容易看出, 上节定理3中之1) - 8) 即为经典公理集合论系统 ZFC 的外延公理、无序对公理、空集存在公理、并集公理、幂集公理、替换公理、无穷公理、选择公理(见文献[5]). 由于分出公理可由上列公理推出, 故良集也满足分出公理. 综上所述, 若以定理3之1) - 8) 作为公理, 以文献[2]中所构造的中介逻辑的二值子系统为配套逻辑, 则所构成的形式系统即为无正则公理的经典公理集合论系统 ZFC^-, 在这种意义下, 称 ZFC^- 为MS 的子系统. 另一方面, 由于有无正则公理并不影响 ZFC 作为经典数学的理论基础, 由此可见整个经典数学也能奠基于MS 之上. 因此说中介数学包括经典数学.

参 考 文 献

[1] 朱水林, 中介数学没有包括经典数学, 数学研究与评论, 8: 4(1988), 649- 650.

[2] 朱梧槚、肖奚安, 答《中介数学没有包括经典数学》一文及其它, 数学研究与评论, 9: 1(1989), 149 - 151.

[3] Xiao Xian, Zhu Wujia, *A system of medium axiomatic set theory*, Scientia Sinica (Series A), Vol. XXXI, No. 11(1988).

[4] S. C. 克林, 元数学导论(上册), 科学出版社, 1984, 18- 20.

[5] Thomas Jech, *Set theory*, Academic Press, 1978, 1- 12.

Inclusion Relationship between Classical Axiomatic Set Theory and Madium Axiomatic Set Theory

Zhang Dongmo

(Dept. of Computer Sci., Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 210016)

Xiao Xi'an

(Group of Math., Meteorological College of the Air Force, Nanjing 210012)

Abstract

In this paper, Peano's natural number system is constructed in the medium axiomatic set theory (MS). Based on this construction, the definition of well-set in MS is redefined, and it is proved that redefined well-set satisfies all the axioms of axiomatic set theory system ZFC^- (a subsystem of ZFC without the regular axiom). It is concluded, therefore, that the classical axiomatic set theory system ZFC^- is a subsystem of the medium axiomatic set theory system MS.

Keywords axiomatic set theory, medium axiomatic set theory.