第17卷第4期 数学研究与评论 Vol.17 No.4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

平面自治系统闭轨的存在性*

杨启贵
(广西师范大学数学与计算机科学系, 桂林541004)

摘要 本文研究一般平面自治系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$$

的闭轨的存在性, 所得结果不仅较大地推广和改进了已有的结果, 而且还可以初步估计闭轨的存在位置.

关键词 平面自治系统, 闭轨, 存在性
分类号 AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

1 引言

关于平面自治系统的闭轨的存在性研究, 国内外学者取得了丰富的成果, 如[1-6], 且这方面的结果至今仍在各种数学期刊上不断涌现, 但绝大部分是关于一些特殊的系统, 尤以二次系统与Lienard型系统为甚. 对于一般的平面自治系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{1}$$

的讨论极少, 仅见文献有[1-2]. 本文从系统(1)本身出发, 运用不同于[1-2]的方法给出系统(1)存在闭轨的几个充分条件, 其中定理1, 2还可初步估计闭轨的存在位置, 定理3包括[4-5]相应结果及[6]所有结论作为特例.

本文设

(i) $P,Q:R^2\to R$ 连续, 且保证(1)的解的唯一性, 原点是系统(1)唯一奇点.

(ii) $yP(0,y)>0(y\neq 0)$, $\int^{+\infty}P(0,y)dy=+\infty$.

(iii) $xQ(x,0)<0(x\neq 0)$, $\int^{+\infty}Q(x,0)dy=-\infty$.

令

$$f(x,y)=[P(x,y)-P(0,y)]/Q(x,0),$$
$$g(x,y)=[Q(x,y)-Q(x,0)]/P(0,y),$$
$$h(x,y)=f^2(x,y)+g^2(x,y),$$
$$\lambda(x,y)=\int P(0,s)ds-\int Q(s,0)dx.$$

* 1994年11月14日收到

2 主要结果

定理 1 若(i) - (iii) 成立, 且

(iv) $f(x,y) \le 0, g(x,y) \ge 0, h(x,y) > 0, 0 < |x|, |y| \ll 1$.

(v) $\exists a_1 < 0 < a_2$ 使得

 1° $f(x,y) \ge 0, g(x,y) \le 0, h(x,y) > 0, x \notin [a_1, a_2]$,

 2° $|f(x,y)Q(x,0)| < |P(0,y)|, x \in [a_1, a_2], |y|$ 充分大

(vi) $\exists M, N > 0$ 使得 $\sup\limits_{\substack{a_1 \le x \le a_2 \\ |y| > N}} \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)} < M$.

(vii) $\exists N_1 < 0$ 或 $N_2 > 0$ 使得

 1° $Q(x, N_1) > 0$ 对 $x > a_2$ 或者 2° $Q(x, N_2) < 0$ 对 $x < a_1$.

则系统(1) 至少存在一条闭轨

证明 经简单计算

$$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)} = P^2(0,y)g(x,y) - Q^2(x,0)f(x,y).$$

由条件(iv), 对于 $0 < c_0 \ll 1$, 在闭曲线 $\lambda(x,y) = c_0$ 上有 $\left.\dfrac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)} > 0 (0 < |x|, |y| \ll 1)$, 因此 (1) 的轨线凡与闭曲线 $\lambda(x,y) \equiv c_0$ 相交, 若当 t 增加时都从其内部走向外部, 取 $\lambda(x,y) = c_0$ 作为 Poincaré 环域的内境界线 L_1.

现构造环域的外境线 L_2.

不妨设(vii) 2°成立(若 1°成立类似证明). 取 $N_3 \ge \max\{N+1, N_2\}$. 如图 1, 过 $P_1(a_1, N_3)$ 作斜率为 M 的直线交 $x = a_2$ 于 P_2, 作曲线 $\lambda(x,y) = \lambda(P_2)$ 交 $x = a_2$ 于另一点 $P_3(a_2, y_3)$ 且 $y_3 < 0$(由条件(ii) 知只要 N_3 足够大即可); 再取 $N_4 \ge \max\{N_3, -y_3\}$, 过 $P_4(a_2, -N_4)$ 作斜率为 M 的直线交 $x = a_1$ 于点 P_5, 过 P_5 点作曲线 $\lambda(x,y) = \lambda(P_5)$ 必交直线 $x = a_1$ 于另一点 $P_6(a_1, y_6)$ 且 $y_6 > 0$(只要 N_4 足够大即可), 若 P_6 在 P_1 点之下, 则取闭曲线 $\overline{P_1P_2} \cup \overleftarrow{P_2P_3} \cup \overline{P_3P_4} \cup \overline{P_4P_5} \cup \overleftarrow{P_5P_6} \cup \overline{P_6P_1}$ 作为环域的外境线 L_2.

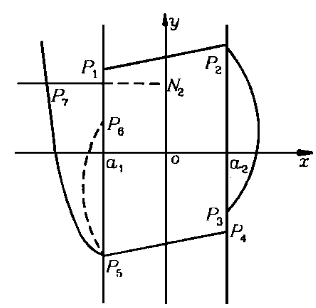

图 1

若 P_6 在 P_1 之上, 则取闭曲线 $\overline{P_1P_2} \cup \overleftarrow{P_2P_3} \cup \overline{P_3P_4} \cup \overline{P_4P_5} \cup \overleftarrow{P_5P_7} \cup \overline{P_7P_0} \cup \overline{P_0P_1}$ 作为环域的外境线 L_2, 其中 P_0 是直线 $y = N_2$ 与直线 $x = a_1$ 的交点 事实上

在 $\overleftarrow{P_2P_3}$ 和 $\overleftarrow{P_5P_6}$ 及 $\overleftarrow{P_5P_7}$ 上, 根据条件(v) 1°有 $\left.\dfrac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)} = P^2(0,y)g(x,y) - Q^2(x,0)f(x,y) < 0$, 当 $x \notin [a_1, a_2]$.

在 $\overline{P_1P_2}$ 上, $x \in [a_1, a_2], y > N$, $\dfrac{dy}{dx} < M$, 由(v) 2°, $\dfrac{dx}{dt} = P(x,y) = P(0,y) + f(x,y)Q(x,0) > 0$.

在 $\overline{P_4P_5}$ 上, $x \in [a_1, a_2], y < -N$, 由(vi), $\dfrac{dy}{dx} < M$, 再由(v) 2°知 $\dfrac{dx}{dt} = P(0,y) + f(x,$

$y)Q(x,0) < 0$.

在$\overline{P_3P_4}$上, $\frac{dx}{dt} = P(a_2,y) = P(0,y) + f(a_2,y)Q(a_2,0)$, 根据(v) 2°知$\frac{dx}{dt} < 0$.

在$\overline{P_6P_1}$上, $\frac{dx}{dt} = P(a_1,y) = P(0,y) + f(a_1,y)Q(a_1,0)$, 根据(v) 2°知$\frac{dx}{dt} > 0$.

在$\overline{P_7P_0}$上, 由(vii) 2°得$\frac{dy}{dt} = Q(x,N_2) < 0$. 所以系统(1) 的轨线与$L_2$相遇时均随时间$t$的增加而进入$L_2$的内部. 由Bendison-Poincaré环域定理即知定理1 的结论为真.

例1　微分系统

$$\begin{cases} \dot{x} = ay^7 - (x^3 + xy^2 - x), \\ \dot{y} = (1 - x^2 - y^2)y^3 - x, \end{cases} \tag{2}$$

其中$a > 0$.

简单计算得原点(0, 0) 是系统(2) 唯一奇点, 且

$$\begin{cases} P(0,y) = ay^7, \ f(x,y) = -1 + x^2 + y^2, \\ Q(x,0) = -x, \ g(x,y) = \frac{1}{ay^4}(-x^2 - y^2 + 1). \end{cases}$$

取$a_1 = -2, a_2 = 2, M = 1, N$为充分大正数, $N_2 = 1$, 易验证(i) - (vi), (vii) 2°满足, 由定理1 知系统(2) 至少有一条闭轨.

类似定理1 还可以证明

定理2　若定理1 条件((i) - (iii), (vi) 成立且

(iv)′ $f(x,y) \geq 0, g(x,y) \leq 0, h(x,y) > 0, 0 < |x|, |y| \ll 1$.

(v)′ $\exists a_1 < 0 < a_2$使得

1° $f(x,y) \leq 0, g(x,y) \geq 0, h(x,y) > 0, x \notin [a_1, a_2]$;

2° $|f(x,y)Q(x,0)| > |P(0,y)|, x \in [a_1,a_2], |y|$充分大.

(vii)′ $\exists N_1 < 0$或$N_2 > 0$使得

1° $Q(x,N_1) < 0$对$x > a_2$或2° $Q(x,N_2) > 0$对$x < a_1$,

则系统(1) 至少存在一条闭轨.

引理1　设定理1 条件(i), (iii), (iv) 满足, 且

(ii)′ $yP(0,y) > 0 (y \neq 0), P(0, \pm\infty) = \pm\infty$,

(v)″ (v) 1°成立, 且有

$$\overline{\lim_{|y| \to +\infty}} \sup_{a_1 < x < a_2} \left| \frac{f(x,y)Q(x,0)}{P(0,y)} \right| < 1.$$

则系统(1) 过任意点(x,y)的正半轨绕原点盘旋.

证明　因为由条件(iv) 知当$0 < |x|, |y| \ll 1$时有$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)} = P^2(0,y)g(x,y) - Q^2(x,0)f(x,y) \geq 0$, 所以原点是不稳定的奇点.

根据条件(v)″可知存在$\epsilon > 0$和$N > 0$, 当$|y| \geq N$时

$$\left| \frac{f(x,y)Q(x,0)}{P(0,y)} \right| < 1 - \epsilon.$$

于是$1 + \frac{f(x,y)Q(x,0)}{P(0,y)} > \epsilon$.

当 $x\in[a_1,a_2]$, $|y|>N$ 时

$$|P(x,y)| = |P(0,y)+f(x,y)Q(x,0)| = |P(0,y)|\left|1+\frac{f(x,y)Q(x,0)}{P(0,y)}\right| \ge \epsilon|P(0,y)|.$$

即当 $x\in[a_1,a_2]$, $y>N$ 时 $P(x,y)\ge\epsilon P(0,y)$; 当 $x\in[a_1,a_2]$, $y<-N$ 时 $P(x,y)\le\epsilon P(0,y)$. 所以总存在 $N_1>N$, 根据(ii)′得

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y)\ge\epsilon P(0,y)>1,\ \text{当}\ x\in[a_1,a_2],\ y>N_1;$$

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y)\le\epsilon P(0,y)<-1,\ \text{当}\ x\in[a_1,a_2],\ y<-N_1.$$

即在区域 $\{(x,y)\,|\,a_1\le x\le a_2,\ |y|>N_1\}$ 内不会有垂直渐近线.

又由(v)′知 $\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)}<0$, 当 $x\notin[a_1,a_2]$; 且

$$y\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\substack{x=0\\ y\neq0}}=yP(0,y)>0,\qquad x\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{x\neq0\\ y=0}}=xQ(x,0)<0.$$

综上所述引理得证.

附注1　此引理为文[3]中引理1的推广.

定理3　若引理条件满足, 且

(vii)′　如下条件之一成立

1°　当 $x>0, y<0$ 时, $f(x,y)>-\dfrac{P(0,y)}{Q(x,0)}$; 且 $\exists N_1<0$, $a_2^*>a_2>0$ 使得当 $x\ge a_2^*$ 有 $Q(x,N_1)>0$;

2°　当 $x<0, y>0$ 时, $f(x,y)>-\dfrac{P(0,y)}{Q(x,0)}$; 且 $\exists N_2>0$, $a_1^*<a_1<0$ 使得当 $x\le a_1^*$ 有 $Q(x,N_2)<0$.

则系统(1)至少存在一条闭轨.

证明　如定理1作环域的内境界线 L_1.

现构作外境界线 L_2. 不妨设(vii)′2°成立. 如图2, 根据引理1知过 P_1 的正半轨 $\gamma^+_{P_1}$ 绕原点盘旋, 故随时间 t 增加 $\gamma^+_{P_1}$ 依次交正 y 半轴于 P_2, x 正半轴于 P_3, y 负半轴于 P_4, x 负半轴于 P_5. 设 P_5 坐标为 $(x_5,0)$, 若 $a_1^*\le x_5<0$, 则过 P_5 作 x 轴垂线交 $\gamma^+_{P_1}$ 轨线段 $\overline{P_1P_2}$ 于 P_6, 则取闭曲线 Γ: $\overline{P_6P_2P_3P_4P_5}\cup\overline{P_5P_6}$ 作环域的外境线 L_2, 此时因在 $\overline{P_5P_6}$ 由(vii)′2°知 $\frac{dx}{dt}=P(0,y)+f(x,y)Q(x,0)>0$.

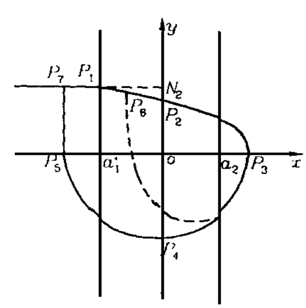

图2

若 $x_5<a_1^*$, 则取闭曲线 Γ: $\overleftarrow{P_1P_2P_3P_4P_5}\cup\overline{P_5P_7}\cup\overline{P_7P_1}$ 作环域的外境界线, 因为此时由(vii)′2°知 $\frac{dx}{dt}=P(0,y)+f(x,y)Q(x,0)$ 在 $\overline{P_5P_7}$ 上 $\frac{dx}{dt}>0$, 在 $\overline{P_7P_1}$ 上, $\frac{dy}{dt}=Q(x,N_2)<0$.

根据环域定理得证.

若(vii)′ 1°成立, 类似方法证之. 证毕.

例 2　考虑微分方程

$$\begin{cases} \mathring{x} = y^n, \quad n = 1, 3, \cdots, \\ \mathring{y} = -(x^2 - 5)(y^2 + 1)y^n - x. \end{cases} \tag{3}$$

易知(0, 0) 是唯一奇点, 且

$$\begin{cases} P(0, y) = y^n, \ f(x, y) = 0, \\ Q(x, 0) = -x, \ g(x, y) = (5 - x^2)(1 + y^2). \end{cases}$$

取 $a_1 = -6$, $a_2 = 6$, 不难验证条件(i), (ii)′, (iii), (iv), (v)″, (vii)′成立, 根据定理 3 知系统(3) 至少存在一条闭轨.

特殊地, 系统(1) 是下面特殊系统

$$\begin{cases} \mathring{x} = \varphi(y), \\ \mathring{y} = -\tilde{f}(x, y)\varphi(y) - \tilde{g}(x). \end{cases} \tag{4}$$

则有如下推论.

推论　如果下列条件成立:

i) $\tilde{f}(0, 0) < 0$;

ii) $\exists a < 0 < b$, 使得当 $x < a$ 和 $x > b$ 时 $\tilde{f}(x, y) \geq 0$, 其中 $y \in R$;

iii) $y\varphi(y) > 0 (y \neq 0)$, $\varphi(\pm\infty) = \pm\infty$;

iv) $x\tilde{g}(x) > 0 (x \neq 0)$, 对于 $G(x) \stackrel{\triangle}{=} \int g(s)ds$ 有 $G(\pm\infty) = +\infty$;

v) $\tilde{f}(x, y)$ 关于 x, y 是局部 Lipschitz 的, $\varphi(y)$, $\tilde{g}(x)$ 是局部 Lipschitz 的;

vi) 如下条件之一成立

1° $\exists k > 0$ 及 $a^* < a$ 使得当 $x \leq a^*$ 时, $k\tilde{f}(x, k) + \tilde{g}(x) \geq 0$,

2° $\exists k > 0$ 及 $b^* > b$, 使得当 $x \geq b$ 时, $-k\tilde{f}(x, -k) + \tilde{g}(x) \leq 0$.

则系统(4) 至少存在一条闭轨.

证明　由定理 3 立得.

附注 2　若系统(4) 中 $\varphi(y) \equiv y$, 则推论则为[6] 的全部结论, 由于文[6] 包含[4-5] 相应结论为特例, 因此定理 3 以[4-5] 相应结果及[6] 全部结论为特例.

附注 3　定理 1, 3 中条件(iv) 是保证系统(1) 的唯一奇点是局部排斥(repulsive), 因而它可以被任何能保证奇点是局部排斥的条件所代替. 由于定理 1, 2 的证明是利用构造代数曲线方法, 从而可以初步估计闭轨的位置.

附注 4　若函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 解析, 则定理 1—3 可进一步得出存在极限的结论.

参　考　文　献

[1] 李森林, 黄立宏, 平面自治系统极限环的存在性及解的有界性, 湖南大学学报, 20: 1(1993), 1-8.

[2] Huang Lihong, Yu Jianshe and Qian Xiangzheng, *Boundedness of solution and existence of periodic solutions for autonomous plannar systems*, Ann. of Diff. Eqs, 9: 4(1993), 425-432.

[3] Zhan Zunkai, *On the existence of limit cycles for differential equation* $\mathring{x} = P(y)$, $\mathring{y} = Q(x, y)$, Ann.

of Diff. Eqs., 5: 3(1989), 341- 348.

[4] P. J. Ponzo and N. Wax, *Periodic solution of generalized Liénard equations*, J. Math. Anal. Appl., 104(1984), 117- 127.

[5] Zheng Zuohuan, *Periodic solutions of generalized Lienard equations*, J. Math. Anal. Appl., 148(1990), 1- 8.

[6] **庾建设、黄立宏**, **关于"广义**Lienard**方程的周期解"一文的注记**, **数学研究与评论**, 14: 1(1994), 149- 152.

Existence of Closed Orbits for Autonomous Planar System

Yang Qigui

(Dept. of Math. & Compt. Sci., Guangxi Normal Univ, Guilin 541004)

Abstract

In this paper, some new sufficient conditions are obtained which ensure that the autonomous planar system

$$\mathring{x} = P(x, y), \quad \mathring{y} = Q(x, y)$$

has at least one closed orbit. The results improve and extend those in [4- 6], and may be used to estimate for roughly the existence place of closed orbit.

Keywords autonomous planar system, closed orbit, existence.