第17卷第4期 数学研究与评论 Vol.17 No.4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

求解单阶段随机规划的一种光滑逼近法*

万仲平 纪昌明 陈 开 周
(武汉水利电力大学, 430072) (西安电子科技大学, 710071)

摘 要 本文借助某种离散方式把单阶段随机规划问题转化为具有多个约束的确定性非线性规划, 然后利用极大熵函数方法, 把此确定性规划转化为只带简单约束的非线性规划, 由此提出了求解这种随机规划的光滑逼近法, 同时给出了该法的收敛性分析, 较好地克服了因提高离散精度导致约束函数个数迅速增大所带来的求解困难

关键词 单阶段随机规划, 光滑逼近法, 上图收敛法

分类号 AMS(1991) 90C15/CCL O221.5

1 引 言

在求解连续型随机变(向)量的随机规划问题时, 除极少数问题外, 通常采用某种离散化方法而得到一个(离散)随机变量序列, 从而将原问题转化为确定性数学规划问题[1], 这样可以利用非线性规划中的一些有效算法进行求解. 然而, 如何克服因离散精度的提高导致约束函数个数迅速增大给求解带来的困难, 是必须解决的一个问题. 文[2]利用精确罚函数法思想讨论了单阶段随机规划的近似求解问题, 最后得到了一个非光滑极小化问题. 这里, 利用极大熵函数方法[3,4], 提出了求解单阶段随机规划的一种光滑逼近法, 同时讨论了算法的收敛性. 考虑如下随机规划

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \int_{\Omega} g_0(x,\omega)P(d\omega), \\ \text{s.t.}\quad & g_i(x,\omega) \le 0, \quad i=1,\cdots,m, \\ & x\in D, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 ω 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ 上的连续型随机变(向)量, $\mathbf{A}$ 为 Ω 上的 Borel σ-域, $\Omega\subset R^r$ 为有界连通闭集.

文[1,5]曾对类似问题(1)的随机规划问题的有关可测性、稳定性等理论问题做过一些研究, 因此, 在这里始终假设问题(1)的解存在. 由[2]和[6], 在第 k 次迭代时, 把 Ω 划分为 N_k 个子块 $S_j^{(k)}$, 且 $S_i^{(k)}\cap S_j^{(k)}=\varnothing\,(i\neq j,\ i,j=1,\cdots,N_k)$. 并定义离散随机变量序列 $\{\xi^{(k)}\}$ 如下: 若 $\omega\in S_j^{(k)}$, 则 $\xi^k=u_j^{(k)}$, 其概率 $p_j^{(k)}=P\{\xi^k=u_j^{(k)}\}=\varphi(u_j^{(k)})\Delta v_j^{(k)}$, 其中 $\varphi(u)$ 为 ω 密度函数, $\Delta v_j^{(k)}$ 为 $S_j^{(k)}$ 的测度. 从而得到如下确定性非线性规划问题:

* 1994年8月12日收到. 国家自然科学基金和国家教委优秀年轻教师基金资助

$$\min \sum_{j=1}^{N_k} g_0(x, u_j^{(k)}) p_j^{(k)},$$

$$\text{s.t.} \quad g_i(x, u_j^{(k)}) \le 0, \quad j = 1, \cdots, N_k, i = 1, \cdots, m, \tag{2}$$

$$x \in D.$$

2 替代问题与假设

由[3, 4]中的极大熵函数法, 得到问题(2)的近似替代可微规划问题

$$\min \sum_{j=1}^{N_k} g_0(x, u_j^{(k)}) p_j^{(k)},$$

$$\text{s.t.} \quad G_k(x, t) = \frac{1}{t} \ln\left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_k} \exp\{t g_i(x, u_j^{(k)})\}\right] \le 0, \tag{3}$$

$$x \in D,$$

称 $G_k(x, t)$ 为极大熵函数, $t > 0$ 为熵参数

命题1[3, 4] 对任意 $x \in D$, 有

$$h_k(x) \le G_k(x, t) \le h_k(x) + \ln(mN_k)/t, \tag{4}$$

其中 $h_k(x) = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le N_k} g_i(x, u_j^{(k)})$.

因此, 对固定 k, 当 $t \to +\infty$ 时, $G_k(x, t)$ 一致收敛于 $h_k(x)$. 为了讨论问题(3)的解列收敛到问题(1)的解, 作如下假设

A1) D 为有界闭凸集, Ω 为有界闭连通集, 且问题(1)的解集非空;

A2) $g_i(x, \omega)$ 关于 x 为连续可微凸函数, 关于 ω 为有界可测函数($i = 0, 1, \cdots, m$);

A3) 存在 $\bar{x} \in D$, 使得 $g_i(\bar{x}, \omega) < 0$ 对任意 $\omega \in \Omega$ 成立($i = 1, \cdots, m$);

A4) 对 $x \in D$, $\|\nabla_x g_i(x, \omega)\| \le \delta_i(\omega)$, 其中 $\delta_i(\omega)$ 为有界可测函数($i = 0, 1, \cdots, m$).

另外由[5, 6], 不难得到: i) $\{\xi^k\}$ 依分布收敛于 ω, ii) 对连续函数 $H(\omega)$, 有

$$\sum_{i=1}^{N_k} H(u_j^{(k)}) p_j^{(k)} - \int_{\Omega} H(\omega) P(d\omega), \ (k \to \infty) \tag{5}$$

命题2 设 $x(t) \to x\ (t \to +\infty)$, 则 $G_k(x(t), t) \to h_k(x)$.

证明 由A2)有 $g_i(x(t)) \to g_i(x)\ (i = 1, \cdots, m)$. 以及对 $a_i > 0, b_i > 0$ 有

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} b_i \le \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{b_i}.$$

那么有

$$\begin{aligned}
&\left|G_k(x(t), t) - G_k(x, t)\right| \\
&\le \frac{1}{t} \ln\left[\sum_{i=1}^{m} \exp\{t(g_i(x(t)) - g_i(x))\}\right] \\
&\le \frac{1}{t} \ln\left[m \exp\{t \sup_i \left|g_i(x(t)) - g_i(x)\right|\}\right] \\
&= \frac{1}{t} \ln m + \sup_i \left|g_i(x(t)) - g_i(x)\right| \to 0 \quad (t \to +\infty).
\end{aligned}$$

再由命题 1 及

$$\left|G_k(x(t),t)-h_k(x)\right|\le\left|G_k(x(t),t)-G_k(x,t)\right|+\left|G_k(x,t)-h_k(x)\right|,$$

故有 $G_k(x(t),t)\to h_k(x)\ (t\to+\infty)$.

3　收敛性讨论

令

$$F_0=f(x)=\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega),$$

$$F_k=F_k(x)=\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x,u_j^{(k)})p_j^{(k)}.$$

命题 3　设 A 1) 至 A 4) 成立, 则 $\lim F_k\overset{e}{=}F_0$, 即 F_k 上图收敛到 F_0.

证明　设 $x^k\to x, x\in D$. 则

$$\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x^k,u_j^{(k)})p_j^{(k)}-\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)$$

$$\le\sum_{j=1}^{N_k}\|\nabla_x g_0(x^k,u_j^{(k)})\|\|x^k-x\|p_j^{(k)}$$

$$+\left|\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x,u_j^{(k)})p_j^{(k)}-\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)\right|\to0\ (k\to\infty).$$

因此有 $\lim\sup\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x^k,u_j^{(k)})p_j^{(k)}\le\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)$. 即 $\lim\sup F_k\le F_0$.

另一方面, 有

$$\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)-\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x^k,u_j^{(k)})p_j^{(k)}$$

$$\le\left|\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)-\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x,u_j^{(k)})p_j^{(k)}\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{N_k}\|\nabla_x g_0(x,u_j^{(k)})\|\|x^k-x\|p_j^{(k)}\to0\ (k\to\infty).$$

因此有 $\lim\inf F_k\ge F_0$. 故有 $\lim F_k\overset{e}{=}F_0$.

命题 4　设 A 1) - A 4) 成立, 则 $\lim M_k\overset{k}{=}M$. 即集 M_k 在 Kuratoswki 意义下收敛于集 M. 其中 M 和 M_k 分别为问题(1) 与(2) 的可行解集

该命题的证明可仿[6] 中命题 3. 1, 假设 A 4) 和 A 2) 与 D 的凸性得到 令

$$\varphi(x)=\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)+\psi_M(x),$$

$$\varphi_k(x)=\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x,u_j^{(k)})p_j^{(k)}+\psi_{M_k}(x),$$

其中 $\psi_M(x)$ 为集 M 的指示函数

定理 5　设 $A_1)$ - $A_4)$ 成立, 则 $\varphi_k(x)\xrightarrow{e}\varphi(x)$.

证明　设 $x\in M$，$x^k\in M_k$ 且 $x^k\to x$，则

$$\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)-\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x^k,u_j^{(k)})p_j^{(k)}$$

$$\le\left|\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)-\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x^k,u_j^{(k)})p_j^{(k)}\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{N_k}p_j^{(k)}\left|g_0(x,u_j^{(k)})-g_0(x^k,u_j^{(k)})\right|\to 0\ (k\to\infty).$$

即有 $\lim\inf\varphi_k(x^k)\ge\varphi(x)$.

设 $x\notin M$，$x^k\in M_k$，且 $x^k\to x$. 则 $\varphi(x)=+\infty$. 由命题 4 至多有有限个 k 使得 $x^k\in M_k$（否则，由 $x^k\to x$ 将有 $x\in M$）. 因此 $\varphi_k(x^k)=+\infty$（对充分大的 k）.

另一方面，设 $x\in M$，由命题 4，存在 $x^k\in M_k$，且 $x^k\to x\ (k\to\infty)$. 因而有

$$\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x^k,u_j^{(k)})p_j^{(k)}-\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)$$

$$\le\sum_{j=1}^{N_k}p_j^{(k)}\left|g_0(x^k,u_j^{(k)})-g_0(x,u_j^{(k)})\right|$$

$$+\left|\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x,u_j^{(k)})p_j^{(k)}-\int_\Omega g_0(x,\omega)P(d\omega)\right|\to 0\ (k\to\infty).$$

由此得到 $\lim\sup\varphi_k(x^k)\le\varphi(x)$. 如果 $x\notin M$，则 $\varphi(x)=+\infty$，因此对任意 x^k，有 $\lim\sup\varphi_k(x^k)\le\varphi(x)$. 由上图收敛性定义有 $\lim\varphi_k(x^k)\stackrel{e}{=}\varphi(x)$.

定理6　对充分大的 t 和 k，问题(3)是问题(1)的较好近似解.

证明　由于问题(2)等价于问题

$$\begin{aligned}&\min\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x,u_j^{(k)})p_j^{(k)},\\&\text{s.t.}\quad h_k(x)\le 0,\ x\in D,\end{aligned}\tag{6}$$

假设 $x(t)\to\bar{x}(t\to+\infty)$ 对固定 k，其中 $\{x(t)\}$ 为问题(3)的解序列，由此可得 $\bar{x}$ 为问题(6)(亦即问题(2))的解. 事实上，只要证明 $\bar{x}$ 为(6)的可行解即可. 倘若 $h_k(\bar{x})>0$，由命题 2，对 $\epsilon=h_k(\bar{x})/2$，存在 $K_1>0$，当 $t>K_1$ 时有 $G_k(x(t),t)>h_k(\bar{x})-\epsilon>0$，这与 $x(t)$ 为问题(3)的解矛盾.

设 $\{y^k\}$ 为问题(2)的解列，$\bar{x}$ 为问题(1)的解，则对 $\epsilon>0$，存在 $K_2>0(k>K_2)$，有 $\left|f_k(y^k)-f(\bar{x})\right|<\epsilon/2$. 其中 $f_k(x)=\sum_{j=1}^{N_k}g_0(x,u_j^{(k)})p_j^{(k)}$. 事实上，易见 y^k 为问题(1)的可行解. 由式(5)有 $f(\bar{x})\le f(y^k)\le f_k(y^k)+\epsilon/2$. 又由 A_2) 及充分大的 k 有 $\mathrm{diam}(S_j^{(k)})$ 足够小($\mathrm{diam}(S_j^{(k)})$ 为集 $S_j^{(k)}$ 的直径) 有 $g_i(\bar{x},u_j^{(k)})\le 0$(因 $\bar{x}$ 为问题(1)的解). 则 $\bar{x}$ 为问题(2)的可行解. 所以有 $f_k(y^k)\le f_k(\bar{x})\le f(\bar{x})+\epsilon/2$. 从而，对充分大的 k 有 $\left|f_k(y^k)-f(\bar{x})\right|<\epsilon/2$.

假设 $x(t)\to y^k$(对任意固定 k，$x(t)$ 为问题(3)的解，$t\to+\infty$). 那么对足够大的 k，有 $\left|f_k(x(t))-f(\bar{x})\right|<\epsilon$. 为证此结论，只要 $k>\max\{K_1,K_2\}$ 且足够大，由式 $\left|f_k(x(t))-f(\bar{x})\right|\le\left|f_k(x(t))-f_k(y^k)\right|+\left|f_k(y^k)-f(\bar{x})\right|$ 即可得知定理结论成立.

由此可以得到求解问题(1) 的一个算法模式:

1° 按某种方式划分 D, 且选择 $u_j^{(k)}, p_j^{(k)}$ 得到问题(2) (要求 $N_{k+1} > N_k$).

2° 取 t 足够大, 求解问题(3).

3° 检验算法终止条件.

参 考 文 献

[1] 王金德, 随机规划, 南京大学出版社, 1990.

[2] 万仲平, 单阶段随机规划的一种近似精确罚函数法, 工程数学学报, 13: 4(1996), 37- 42.

[3] 唐焕文、张立卫, 某类不可微规划问题的极大熵方法, 计算数学, 3(1993), 268- 275.

[4] 李兴斯, 某类不可微优化问题的一个有效方法, 中国科学(A 辑), 24: 4(1994), 371- 377.

[5] 陈志平, 一般多阶段补偿问题的理论与算法, 西安交通大学博士学位论文, 1992.

[6] R. Lepp, *Approximations to stochastic programs with complete recourse*, SIAM J. Control & Optimization, 2(1990), 382- 394.

A Smooth Approximating Method for Solving Single Stage Stochastic Programming

Wan Zhongping　　Ji Changming

(Wuhan University of Hydraulic and Electric Ergineering, 430072)

Chen Kaizhou

(Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract

A smooth approximating method for solving single stage stochastic programs is proposed, and the convergence concerning this method is simultaneously given. The original problem is changed into a determinate nonlinear programs with many constraints by means of some discretizing random variable way, and then the determinate problem is transformed into a nonlinear programs with only simple constraint making use of the maximum entropy principle. Thus difficulties of rapidly growing of the number of constraints due to increasing of the discretizing random variable precision will be overcomed.

Keywords single stage stochastic programming, smooth approximating method, epi-convergence.