

一类可补子群*

郑文祥

(青岛大学数学系, 266071)

摘要 本文在有限群的半正规子群的研究基础上对可补子群进行研究, 用半正规代替正则, 推广了已有的一些结果

关键词 可补子群, 半正规子群, π -子群

分类号 AM S(1991) 20D/CCL O 152

文中的群均为有限群

定义 群 G 的 A 叫做 G 的半正规子群, 如果存在 $B \leq G$, 使 $AB = G$, 且对于 B 的所有真子群 B_1 , 使 $AB_1 < G$, 子群 B 称为 A 在 G 中的 S -补

A 在 G 中的 S -补集记为 $S_G(A)$.

显然, G 的正规子群为半正规子群, 下面为本文中所用到的半正规子群的基本性质:

性质 1 如果 A 为 G 的半正规子群, 则对 $x \in G, A^x$ 仍为 G 的半正规子群, 且 $S_G(A^x) = S_G(A)$. 又若 $B \in S_G(A)$ 则对任意 $y \in G, B^y \in S_G(A)$ ([1] 中定理 1).

性质 2 设 A 为 G 的半正规子群, 如果 $A \leq H \leq G$, 那么 A 是 H 的半正规子群([1] 中定理 2).

性质 3 如果群 G 的 Sylow 子群 P 为半正规的, 则 $S_G(P)$ 中的每个子群都为 G 的 P' -Hall 子群([1] 中, 引理 1).

引理 设 H 为 G 的半正规子群, $B \in S_G(H)$, 则 $H \cap B \leq \Phi(B)$.

证明 由条件知 $G = HB$, 若 $B = G$, 则任意 M 为 G 的极大子群, 因为 $HM < G$, 所以 $M = HM$, 故 $H \leq M$, 从而 $H \leq \Phi(G)$, 这时结论正确

现设 $B < G$, 反证法 若 $H \cap B \not\leq \Phi(B)$, 因而存在 B 的极大子群 $\hat{M}$, 而 $H \cap B \not\leq \hat{M}$, 所以, $\langle H \cap B, \hat{M} \rangle = B$, 由半正规性, $H\hat{M} = H\hat{M} < G$. 故对任意 $x \in H \cap B, y \in \hat{M}$, 存在 $x' \in H, y' \in \hat{M}$, 使 $yx = x'y'$, 所以对任意 $b \in B$, 有 $b = x_0 y_0$, 这里, $x_0 \in H, y_0 \in \hat{M}$, 因而得到

$$B \leq H\hat{M} : G = HB \leq H \cdot H\hat{M} = H\hat{M} < G$$

矛盾, 故有

$$H \cap B \leq \Phi(B).$$

显然可由引理推广了 Huppert 定理

定理 1 设 A 在 G 中半正规, $K \in S_G(A), A \cap \Phi(K) = 1$, 则 K 为 A 在 G 中的补

* 1994年11月14日收到

证明 由条件知 $G = AK$. 由引理得 $A \cap K \leq \Phi(K)$, 故

$$A \cap K \leq \Phi(K) \cap A = 1,$$

所以 K 为 A 在 G 中的补

在 Gaschütz 定理中, 要求 A 为 G 的正规的 Abel 群, 设 K 为使 $G = AK$ 成立的极小子群, 在这个定理的证明中, 可得到

$$A \cap K = A \cap \Phi(K) \leq A \cap \Phi(G),$$

由 Gaschütz 定理条件 $A \cap \Phi(G) = 1$, 从而 $A \cap \Phi(K) = 1$. 因而 Gaschütz 定理为定理 1 的结果, 前者的条件高得多.

定理 2 设 H 为 G 的 Hall- π 子群, H 在 G 中半正规, 则 H 在 G 中有补

证明 由条件, 存在 $B \in S_G(H)$, 使 $G = HB$, 由 $H \cap B = 1$, 否则设 $p \mid |H|, p \mid |B|$, 令 B_p 为 B 的 p -Sylow 子群, 则 $H \cdot B_p$ 为 G 的子群, 又

$$|HB_p| = |H| |B_p| / |H \cap B_p|,$$

因为 $|HB_p| \mid |G|$, 又 H 为 Hall- π 子群, 因而 $|B_p| / |H \cap B_p| = 1$ 即 $H \geq B_p$.

任意 $x \in B$, $(H \cap B)^x$ 中任一个 q -Sylow 子群 B_q , 因为 $q \mid |H|, q \mid |B|$, 所以 $B_q \leq H \cap B$.

故 $(H \cap B)^x \leq H \cap B$, 所以 $(H \cap B) \trianglelefteq B$, 所以 $G = HB$. 故 $|G| = |H| \frac{|B|}{|H \cap B|}$, 所以

$|G| / |H| = \frac{|B|}{|H \cap B|}$, 可见 $H \cap B$ 为 G 的 Hall- π 子群, 由 Schur-Zassenhaus 定理^[3], 得到 $H \cap B$ 在 B 中有补, 设为 $\hat{B}$, 则 $B = (H \cap B)\hat{B}$, 所以 $G = HB = H(H \cap B)\hat{B} = H\hat{B} < G$, 矛盾. 所以 B 为 H 在 G 中的补.

这里的定理 2 大大推广了 Schur-Zassenhaus 定理^[3] 的存在性部分.

定理 3 设 H 为 G 的 Hall- π 子群, 有五种条件, K 使 $G = HK$, 则 H 有补为 Hall- π 子群

证明 不妨设 K 为最性, 反证法. 设 K 不为 Hall- π 子群, 则存在素数 $p \mid |K|, p \nmid |H|$, 因 K 可解, 故 K 中有 Sylow 基, 设为 $K_p, K_{p_1}, \dots, K_{p_s}$. 令 H_p 为 H 的 p -Sylow 子群, 当然也为 G 的 p -Sylow 子群, 所以 $K_p \leq H_p^*$, 这里 $x \in G$, 由于 $G = HK$, 因而存在 $h \in H, k \in K$, 使 $x = hk$, 即有

$$K_p \leq H_p^{hk},$$

所以

$$K_p^{k^{-1}} \leq H_p^h \leq H,$$

故

$$G = HK = H(K_p K_{p_1} \cdots K_{p_s})^{k^{-1}} = H K_p^{k^{-1}} (K_{p_1} \cdots K_{p_s})^{k^{-1}} = H (K_{p_1} \cdots K_{p_s})^{k^{-1}},$$

而 $(K_{p_1} \cdots K_{p_s})^{k^{-1}} \not\leq K$. 矛盾.

定理 4 设 H 为 G 的 Hall- π 子群, 若 H 的 Sylow 子群在 G 中半正规, 则 H 在 G 中有补子群

证明 令 $|H| = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$, H_{p_i} 为 H 的 Sylow- p_i 子群, 由 H_{p_i} 在 G 中的半正规性得: 存在 B_1 使 $G = H_{p_i} B_1$, 由性质 3 知 B_1 为 Hall- p_1 子群, 再由性质 1, 可设 $H_{p_2} \leq B_1$, 由性质 2, H_{p_2} 在 B_1 中也半正规, 因而 $B_1 = H_{p_2} B_2$, B_2 为 Hall- (p_1, p_2) 子群, 所以 $G = H_{p_1} B_1 = H_{p_1} H_{p_2} B_3$. 这

里 $H_{p_1}H_{p_2}$ 为 G 的子群(由 H_{p_i} 的半正规性可知). 可以认为 H_{p_3} 在 B_2 中, 事实上, 设 S_{p_3} 为 B_2 的 p_3 -Sylow 子群, 则 $H_{p_3} = S_{p_3}^g$, 因为 $G = (H_{p_1}H_{p_2})B_2$, 所以存在 $x \in H_{p_1}H_{p_2}, y \in B_2$, 使 $g = yx$. 因而

$$G = G^x = (H_{p_1}H_{p_2})B_2^x = H_{p_1}H_{p_2}B^{yx},$$

所以

$$H_{p_3} \leq B_2^{yx}.$$

由条件知 H_{p_3} 在 B_2 中也半正规, 因而存在 $B_3 \in S_{B_2}(H_{p_3})$, 有 $B_2 = H_{p_3}'B_3, B_3$ 为 Hall- (p_1, p_2, p_3) '子群, 这样下去有: $G = HB, \hat{B}$ 为 Hall- π '子群, 从而 H 在 G 中有补子群 (本定理可作为定理 2 的推论, 但必须由 H 的 Sylow 子群的半正规推出 H 的半正规性).

参 考 文 献

- [1] 苏向盈, 有限群的半正规子群, 数学杂志, 8: 1(1988), 5- 9
- [2] Deaconescu, *Frattini-like subgroups of finite groups*, Mathematical Reports volume 2 part 4, Edit-
tor-in-chief, uean D leudone
- [3] J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin,
1980, 246

A Class of Complementary Subgroups

Zheng Wenxiang

(Qingdao University, Shandong 266071)

Abstract

We continue the study on the complementary subgroups on the basis of the research on Semiregular subgroups of finite group. Some results are generalized by replacing the semiregularity with semiregular condition.

Keywords semiregular subgroup, complementary subgroup, π -subgroup.