第17卷第4期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

关于Hilbert空间中一类映象方程的某些问题*

杨 书 郎
(厦门大学自动化系, 福建361005)

摘 要 本文引入一种特殊的保核收缩, 以 f_p-同伦方法为工具研究了Hilbert空间中一类映象方程的解和非零解等问题, 还给出了所得结果的一个应用.

关键词 收缩, 映象方程, f_p-同伦方法
分类号 AMS(1991) 47H10, 47H09/CCL O177.91

1 引 言

考虑完备内积空间(Hilbert空间)X 中的映象方程

$$T_1(x) - x = \theta, \tag{1}$$

这里, $T_1: C \cap K \to X$, K 为 X 的闭子空间, $C \subset X$.

对于方程(1)的解和非零解等问题的研究, 当 T_1 满足如下条件

$$T_1(C \cap K) \subset K \tag{2}$$

时, 已有一些相关的方法和工具可以使用, 例如: 拓扑度工具和 f_p-同伦方法. 但是, 对于不满足上述(2)的范围更广的映象类, 一般就不能直接使用这些工具了.

针对这个问题, 本文考虑所谓(KX)映象类. 在建立一种特殊的保核收缩的基础上, 借助于一些有趣味的变换和技巧, 使用 f_p-同伦方法, 研究了上述(KX)映象方程(1)的解和非零解等有意义的问题. 本文使用的一些符号的意义如下:

X, K 的意义如前; C、D := X 中的闭凸 θ 邻域; $\hat{C}_K$:= 见定义2; E_K := $E \cap K$; ∂C_K := $\partial C \cap K$; $B(E)$:= E 的不空的有界子集族; I := $[0, 1]$; T_I := 由映象 $T(x, t)$ 所确定的如下映象: $T_I(x)$:= $\bigcup_{t \in I}\{T(t, x)\}$; $\alpha(\cdot)$:= X 中的非紧性测度. 文中恒设 $T_1: C_K \to X$.

2 正 文

本文着重考虑如下的(KX)映象类:

定义1 设 $F: C_K \to X$. 这时,

(1.1) 称 F 在 $A \subset C_K$ 上具有性质(KX), 如果

$$(F(x), x) < \|x\|^2 \quad (x \in A \text{ 且 } F(x) \notin K); \tag{3}$$

* 1994年5月23日收到. 1997年5月7日收到修改稿

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(1.2) 如果 F 在 C_K 上具有性质(KX), 则说 F 是个(KX)映象

定义2 设 $\hat{C}$ 为 C 的径向收缩([4], [5]), 又设 P 为 X 中以 K 为投影空间的正交投影映象. 定义如下的映象 $\hat{C}_K: X \to X$ 叫做 C 关于 K 的投影径向收缩: $\hat{C}_K(x) := \hat{C}(P(x))\ (x \in X)$

定义3 设 $F: C_K \to X$.

(3.1) F 叫做广义有界[3]的, 如果 $\hat{C}(\mathrm{conv}(F(C_K))) \in B(X)$.

(3.2) 对于 $g: \partial C_K \to X$, F 叫做满足边界条件$(M; \partial C_K, g)$, 如果有正齐次泛函 $f: X \to R$ 使得

$$f(F(x) - x) \neq f(F(x) - g(x)) - f(x - g(x)) \quad (x \in \partial C_K, F(x) \in K \setminus C) \tag{4}$$

(3.3) 对于 $b \in K \setminus \{\theta\}$, F 叫做在 $\partial D_K \subset C_K$ 满足(边界)条件$(C; \partial D_K, b)$, 如果

$$x \neq F(x) + \beta(b) \quad (x \in \partial D_K, F(x) \in K, \beta > 0) \tag{5}$$

定理1 投影径向收缩 $\hat{C}_K$ 具有如下性质:

(1.1) $\hat{C}_K$ 是连续的1-集压缩映象;

(1.2) $x \in C_K$ 的充要条件是 x 为 $\hat{C}_K$ 的不动点;

(1.3) $x \in K$ 的充要条件是: x 或为 θ, 或为 $\hat{C}_K$ 的相应于固有值 $\lambda \in (0, 1]$的固有元;

(1.4) $\hat{C}_K(X) = C_K$

证明 为简便计, 记 $r := \hat{C}_K$.

首先考虑结论(1.1). 由于正交投影映象 P 是连续非扩张的; 又 $\hat{C}$ 是连续1-集压缩的[4,5], 故 r 就是连续1-集压缩的.

同理可证得, 结论(1.2), (1.3)和(1.4)也成立.

定理2 设1) $g: \partial C_K \to C_K^0$ 是个有界、连续的严格集压缩映象, 且使得

$$\|g(x)\| < \|x\| \quad (x \in \partial C_K); \tag{6}$$

2) $T_0: C_K \to X$ 满足边界条件$(M; \partial C_K, g)$; 3) $T: C_K \times I \to X$ 是个连续映象, 使得:

i) T_I 是个广义有界的凝聚映象;

ii) $x \neq T(x, t) \quad (x \in \partial C_K, t \in I)$; (7)

iii) $T_i(x) = T(x, i) \quad (x \in C_K, i = 0, 1)$; (8)

iv) 对于任一 $t \in I$, 映象 $T(\cdot, t): C_K \to X$ 是(KX)映象

则方程(1)在 C_K^0 中有解.

证明 1) 延拓 g 成为 $G: C_K \to K$ 如下:

$$G(x) := \begin{cases} \theta & (x \in C_K, p(x) = 0), \\ p(x) g(x/p(x)) & (x \in C_K, p(x) > 0), \end{cases} \tag{9}$$

这里, p 为 C 的Minkowski泛函.

由于 p 和 g 都连续, 故 G 易见也连续; 又因 $p(x) = 1\ (x \in \partial C)$, 故 $g(x) = G(x)\ (x \in \partial C_K)$. 且由(9)等还可证得: G 是个严格集压缩映象, 且满足如下的条件

$$G(x) \in C_K^0 \quad (x \in C_K), \tag{10}$$

$$(G(x), x) < \|x\|^2 \quad (\theta \neq x \in C_K). \tag{11}$$

2) 现构造映象 $H: C \times I \to X$, $H_i: C \to X$ 如下:

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$H(x,t) := \begin{cases} T(\hat{C}_K(x), 2t-1) & (x \in C, t \in [\frac{1}{2}, 1]), \\ 2tT_0(\hat{C}_K(x)) + (1-2t)G(\hat{C}_K(x)) & (x \in C, t \in [0, \frac{1}{2})), \end{cases} \tag{12}$$

$$H_i(x) := H(x, i) \quad (x \in C, i = 0, 1).$$

可以证明, H 是个连续映象, 且使得 H_I 是个广义有界的凝聚映象. 还可以证明, H_0 满足边界条件(M)[4]. 事实上, 对于任意的 $x \in \partial C$, 由(10)得, $\bar{x} := G(\hat{C}_K(x)) \in C_K^0 \subset C^0$, 故 $H_0(x) = H(x, 0) = \bar{x} \in C$. 所以, H_0 满足边界条件(M).

3) 现证明

$$x \neq H(x,t) \quad (x \in \partial C, t \in I). \tag{13}$$

设有 $x_0 \in \partial C$ 和 $t_0 \in I$ 使得 $x_0 = H(x_0, t_0)$, 则分别讨论如下两种情况:

情况1 $t_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$. 这时, $x_0 = T(\hat{C}_K(x_0), 2t_0 - 1)$. 记 $\bar{x} := P(x_0)$. 由定理1不难看出, 有 $\lambda \in (0, 1]$ 使得 $\hat{C}(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$, 又因为 P 是正交投影映象, 故 $(x_0, \bar{x}) = \|\bar{x}\|^2$. 这时, 若 $x_0 \bar{\in} K$, 则由(3)可证得

$$\lambda\|\bar{x}\|^2 = (x_0, \lambda\bar{x}) = (T(C_K(x_0), 2t_0 - 1), \hat{C}(\bar{x})) < \|\hat{C}(\bar{x})\|^2 = \lambda^2\|\bar{x}\|^2.$$

这矛盾说明: 必定 $x_0 \in K$, 故 $x_0 \in \partial C_K$. 再据定理1便得 $\hat{C}_K(x_0) = x_0$, 于是 $x_0 = T(x_0, 2t_0 - 1)$, 这与定理条件2中的 ii) 相矛盾.

情况2 $t_0 \in [0, \frac{1}{2})$. 这时, $x_0 = 2t_0T_0(\hat{C}_K(x_0)) + (1 - 2t_0)G(\hat{C}_K(x_0))$. 类似于上述证"1°"的推理可得 $x_0 = \hat{C}_K(x_0)$, 故 $x_0 = 2t_0T_0(x_0) + (1 - 2t_0)g(x_0)$. 现令 $m := 1/2t_0$, 则得 $T_0(x_0) - g(x_0) = m(x_0 - g(x_0))$. 但这是不可能的, 因为: 一方面有 $T_0(x_0) \in K \setminus C$; 另一方面, 对于任意的正齐次泛函 f, 都有

$$\begin{aligned} f(T_0(x_0) - x_0) &= f(m(x_0 - g(x_0)) - (x_0 - g(x_0))) = f((m-1)(x_0 - g(x_0))) \\ &= (m-1)f(x_0 - g(x_0)) m f(x_0 - g(x_0)) - f(x_0 - g(x_0)) \\ &= f(m(x_0 - g(x_0))) - f(x_0 - g(x_0)) = f(T_0(x_0) - g(x_0)) - f(x_0 - g(x_0)). \end{aligned}$$

这和定理的条件2) 相矛盾. 故必定是(13)成立.

4) 由[4]得, 有 $u_0 \in C$ 使得 $u_0 = H_1(u_0) = T(\hat{C}_K(u_0), 1) = T_1(\hat{C}_K(u_0))$. 可以证明 $u_0 \in K$. 事实上若不然, 则记 $\bar{u} := P(u_0)$, 这时, 据 $\hat{C}$ 的性质和定理的条件3) 的 iv) 可证得: 有 $t \in (0, 1]$ 使得 $t\|\bar{u}\|^2 < t^2\|\bar{u}\|^2$, 产生矛盾.

故 $u_0 \in C_K$. 据定理1得, $u_0 = \hat{C}_K(u_0)$. 故有 $u_0 = T_1(u_0)$. 则 u_0 是方程(1)的解. 定理证毕.

直接由上述定理可得

定理3 设1) $g: \partial C_K \to C_K^0$ 是个满足(6)的有界连续的严格集压缩映象; 2) T_1 是个满足边界条件$(M; \partial C_K, g)$的广义有界的连续凝聚的(KX)映象. 则方程(1)在 C_K 中有解.

定理4 设1) $\delta \in (0, 1)$ 使得 $(1+\delta)D \subset C^0$; 2) $g: \partial C_K \to C_K^0$ 是个满足(6)的有界连续严格集压缩映象; 3) $T_0: C_K \to X$ 是满足边界条件$(M; \partial C_K, g)$的(KX)映象, 且在 D_K^0 中没有不动点; 4) $T: C_K \times I \to X$ 是连续的, 且满足:

i) T_I 是个广义有界的凝聚映象;

ii) 对于任一 $t \in I$, 映象 $T(\cdot, t): C_K \to X$ 在 $C_K \setminus D$ 上具有性质(KX);

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

iii) 条件(8)和

$$x \neq T(x, t) \quad (x \in \partial C_K \cup \partial D_K, t \in I) \tag{14}$$

都成立

则方程(1)在 $C_K^0 \setminus D$ 中有非零解

证明 1) 可以证明, 有 $\epsilon \in (0, \delta)$ 使得

$$x \neq T(x, t) \quad (x \in (1+\epsilon)D_K \setminus D^0, t \in I). \tag{15}$$

事实上若这个 ϵ 不存在, 则对于任意的自然数 n 恒有 $x_n \in ((n+1)/n)D_K \setminus D^0$ 和 $t_n \in I$ 使得 $x_n = T(x_n, t_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令 $A = \{x_n\}$, 则可证得 A 有界且 $\alpha(A) = 0$. 因 X 完备, 故 A 有收敛子列 $x_{n_i} \to x$, 易见 $x \in \partial D_K$. 不妨设 $t_{n_i} \to t \in I$. 这时由 T 的连续性便得 $x = T(x, t)$, 这与(14)矛盾.

2) 对于上述 ϵ, 构造泛函 $\varphi: C_K \to [0, 1]$ 如下:

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & (x \in C_K \setminus (1+\epsilon)D_K), \\ (h(x) - 1)/\epsilon & (x \in (1+\epsilon)D_K \setminus D^0), \\ 0 & (x \in D_K^0), \end{cases} \tag{16}$$

上式中 h 是 D 的Minkowski泛函. 易见, φ 是连续的. 现又构造映象 $H: C_K \times I \to X$ 和 $H_i: C_K \to X$ 如下:

$$\left.\begin{aligned} H(x, t) &:= T(x, \varphi(x)t) \quad (x \in C_K, t \in I), \\ H_i(x) &:= H(x, i) \quad (x \in C_K, i = 0, 1). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

易见 H 连续, 且使得

$$H(x, t) = T(x, t) \quad (x \in C_K \setminus (1+\epsilon)D_K). \tag{18}$$

可以验证, H, H_i 分别满足定理2条件中对 T, T_i 的所有要求.

3) 据定理2, 有 $u \in C_K$ 使得 $u = H_1(u) = T(u, \varphi(u))$. 可以证明 $u \in C_K \setminus (1+\epsilon)D_K$. 现由(16)得 $\varphi(u) = 1$, 故得 $u = T_1(u)$, 则 u 是方程(1)的一个非零解, 且可得 $u \in C_K^0 \setminus D$. □

在应用中, 如遇到对于条件"T_0 在 D_K^0 中无动点"不易检验的情况, 可考虑使用如下的

定理5 设1) $\delta \in (0, 1)$ 使得 $(1+\delta)D \subset C^0$, $b \in K \setminus \{\theta\}$; 2) $g: \partial C_K \to C_K^0$ 是个满足(6)的有界连续的严格集压缩映象; 3) $T_0: C_K \to X$ 满足边界条件 $(M; \partial C_K, g)$ 和 $(C; \partial D_K, b)$, 且使得 $T_0(\partial D_K) \subset K$; 4) $T: C_K \times I \to X$ 是个满足(14)的连续映象, 且使得: (i) 定理4的条件4). i) 和4). ii) 都满足, ii) $T_i(x) = T(x, i)$ $(x \in C_K \setminus D, i = 0, 1)$; 5) D 有界, 则方程(1)在 $C_K^0 \setminus D$ 中有非零解.

证明 设定理结论不成立. 这时(结合(14))便得:

$$x \neq T_1(x) \quad (x \in C_K \setminus D^0). \tag{19}$$

现在1) 可以证明, 有 $\epsilon_1 \in (0, 1)$ 使

$$x \neq \lambda T_1(x) \quad (x \in C_K \setminus D^0, \lambda \in [\epsilon_1, 1]). \tag{20}$$

还可证明, 有 $\epsilon_2, \epsilon_3 \in (0, 1)$ 使得

$$x \neq \lambda T_0(x) + \beta b \quad (x \in \partial D_K, \lambda \in [\epsilon_2, 1], \beta > 0), \tag{21}$$

$$x \neq \lambda T(x, t) \quad (x \in \partial D_K, t \in I, \lambda \in [\epsilon_3, 1]). \tag{22}$$

令 $\epsilon := \max\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$, 不难证明, 有 $\epsilon_0 \in (0, \delta)$ 使得对任意的 $\lambda \in [\epsilon, 1]$ 恒有

$$x \neq \lambda T(x, t) \quad (x \in (1+\epsilon_0)D_K \setminus D^0, t \in I). \tag{23}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

事实上, 若这个 ϵ_0 不存在, 则有 $\{x_n\}\subset C_K\setminus D^0$, $\{t_n\}\subset I$ 和 $\{\lambda_n\}\subset[\epsilon, 1]$ 使得 $x_n=\lambda_n T(x_n, t_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 且 $h(x_n)\to 1$, 这里 h 为 D 的Minkowski泛函. 不妨设 $t_n\to t\in I$, $\lambda_n\to\lambda\in[\epsilon, 1]\subset[\epsilon_3, 1]$, 令 $A:=\{x_n\}$, 可以证明 $\alpha(A)=0$, 故 A 含收敛子列 $x_{n_i}\to x$. 易见 $x\in\partial D_K$ 且 $x=\lambda T(x, t)$, 这和(22)相矛盾.

2) 记 h, p 分别为 D, C 的Minkowski泛函, 且构造泛函 ψ 和 φ 和映象 F 如下:

$$\varphi(x):=\begin{cases}1 & (x\in C_K\setminus(1+\epsilon_0)D_K),\\ (h(x)-1)/\epsilon_0 & (x\in(1+\epsilon_0)D_K\setminus D^0);\end{cases}\tag{24}$$

$$\psi(x):=\begin{cases}\epsilon & (x\in D_K^0),\\ \epsilon+(1-\epsilon)(h(x)-1)/(h(x)-p(x)) & (x\in C_K\setminus D^0);\end{cases}$$

$$F(x, t):=\begin{cases}T(x, \varphi(x)t) & (x\in C_K\setminus D^0, t\in I),\\ (1-h(x))b+h(x)T_0(x/h(x)) & (x\in D_K^0\setminus\{\theta\}, t\in I),\\ b & (x=\theta, t\in I).\end{cases}$$

可以证明 φ, ψ 和 F 均连续, 且满足 $\varphi(x)\in[0, 1]$ $(x\in C_K\setminus D^0)$ 和

$$\epsilon\le\psi(x)\begin{cases}=\epsilon & (x\in D_K^0),\\ =1 & (x\in\partial C_K),\\ <1 & (x\in C_K^0\setminus D^0),\end{cases}\tag{25}$$

还有 $\alpha(F_I(A_0))\le\alpha(A_0)$ $(A_0\subset D_K^0\setminus\{\theta\})$.

3) 进而构造映象 $H: C_K\times I\to X$ 和 $H_i: C_K\to X$ 如下: (对于 $i=0, 1$, $t\in I$ 和 $x\in C_K$)

$$H(x, t):=\psi(x)F(x, t),\quad H_i(x):=H(x, i).$$

可以证明, H 和 H_i 分别满足定理4对 T 和 T_i 的所有条件要求. 例如: 对于任意的 $t\in I$, 映象 $H(\cdot, t)$ 恒为(KX)映象. 事实上, 若 $x\in C_K$ 使得 $H(x, t)\bar{\in}K$, 则必 $F(x, t)\bar{\in}K$, 由定理的条件3)得 $x\in C_K\setminus D^0$. 记 $t':=\varphi(x)t$, 可得 $T(x, t')\bar{\in}K$, 再由定理的条件4)便可证得

$$(H(x, t), x)<\|x\|^2.$$

另外还可得: H 是连续的, 且使得 H_I 是个广义有界的凝聚映象等等.

4) 由定理4, 有 $u\in C_K^0\setminus D$ 使得 $u=H_1(u)=\psi(u)F(u, 1)=\psi(u)T(u(\varphi(u)))$. 但这是不可能的, 因为

1° 必定是 $u\in C_K^0\setminus(1+\epsilon_0)D$, 事实上, 若 $u\in(1+\epsilon_0)D_K\setminus D$, 则由(25), $u=\psi(u)T(u, \varphi(u))$ 和(23)相矛盾.

2° 于是, $\varphi(u)=1$, 故 $u=\psi(u)T_1(u)$, 但 $\epsilon_1\le\epsilon$, 故仍由(25), 和(20)相矛盾.

总结以上可见, 定理结论必成立. □

直接由上述结果, 有如下的

定理6 设1) T_1 是个广义有界的连续凝聚映象, 且在 $C_K\setminus D$ 上具有性质(KX); 2) D 有界, 且有 $\delta\in(0, 1)$ 使得 $(1+\delta)D\subset C^0$; 3) $b\in K\setminus\{\theta\}$, 又 $g: \partial C_K\to C_K^0$ 是个满足(6)的有界连续的严格集压缩映象; 4) T_1 满足边界条件 $(M; \partial C_K, g)$ 和 $(C; \partial D_K, b)$, 且使得 $T(\partial D_K)\subset K$. 则方程(1)在 $C_K\setminus D^0$ 中有非零解.

证明 如果方程(1)在 $\partial C_K\cup\partial D_K$ 上有解, 当然定理的结论成立. 下设方程(1)在 $\partial C_K\cup\partial D_K$ 上无解. 这时, 定义映象 $T: C_K\times I\to X$ 和 $T_0: C_K\to X$ 如下:

$$T(x, t):=T_0(x):=T_1(x)\quad(x\in C_K, t\in I).$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

容易看出, 定理5的条件都被满足. 由定理5方程(1)在 $C_K \setminus D^0$ 中有解.

作为前面所得理论结果的一个应用, 现考虑有关数学模型的处理的一个问题. 如所周知, 为处理如下形式的数学模型:

$$x(s) = \int F(x, x(s))\,ds \tag{26}$$

途径之一是: 在一定条件支持下, 利用特定函数空间中的标准正交函数系, 把(26)的研究纳入无穷维非线性代数方程组

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) = \xi_1 \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) = \xi_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_k(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) = \xi_k \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{array}\right\} \tag{27}$$

的研究中.

定理7 设1) $0 < r_0 < r$; 2) 对于任一自然数 i, 函数 f_i 在区域 $G = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0\cdots);\ \xi_i \in R,\ \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \le r\}$ 上连续, 且使得:

i) $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, \cdots)|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \ (r_0 \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \le r)$;

ii) 若 $\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = r_0$, 则有

$$\left.\begin{array}{l} f_j(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0\cdots) = 0 \quad (j \ge n+1), \\ \max\limits_{1 \le i \le n}\{\xi_i - f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0\cdots)\} > \min\limits_{1 \le i \le n}\{\xi_i - f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0\cdots)\}, \end{array}\right\} \tag{28}$$

则方程组(27)有一个非零解 $u = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0\cdots\}$ 使得 $r_0 \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \le r$ (上述定理中, n 为某自然数).

证明 1. 对于任意的自然数 i, 取 M_i 为 $|f_i|$ 在区域 G 上的一个上界. 记 $R_0 = \sum_{i=1}^{n} M_i^2$. 对任意 $i > n$, 取 $r_i > 0$ 使 $r_i < \min\{1, (\sqrt{2^i(M_i^2 + R_0)})^{-1}\}$.

取 $X = l^2$, $K = \{x = \{\xi_i\} \in X;\ \xi_j = 0\ (j > n)\}$, $C = \{x \in X;\ \|x\| \le \sqrt{r}\}$ 和 $D = \{x \in X;\ \|x\| \le \sqrt{r_0}\}$.

2. 定义映象 $T_1: C_K \to X$ 如下

$$T_1(x) = \{\eta\} \quad (x = \{\xi_1, \cdots, \xi_n, 0\cdots\} \in C_K = G),$$

这里

$$\eta = \begin{cases} f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0\cdots) & (i = 1, 2, \cdots n), \\ r_i f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0\cdots) & (i > n). \end{cases}$$

可证定理6的条件都被满足. 事实上:

1) 先证 $T_1(C_K) \in B(X)$ (故 T_1 也广义有界). 记 $f_i(x) = f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ $(x = \{\xi_i\} \in$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

C_K), 这时, 对于任意的 $x=\{\xi_i\}\in C_K$, 有

$$\|T_1(x)\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}|r_i f_i(x)|^2$$

$$\leq R_0+\sum_{i=n+1}^{\infty}M_i^2(2^i(M_i^2+R_0))^{-1}<R_0+1.$$

2) 可以证明, T_1是连续的; 还可以证明, T_1映有界集为列紧集(于是, T_1是凝聚的). 而且不难验证, T_1在 $C_K\setminus D^0$中具有性质(KX), 并使得 $T_1(\partial D_K)\subset K$.

进一步更可验证, 1.° 对于任意的 $g:\partial C_K\to C_K^0$, T_1恒满足边界条件$(M;\partial C_K,g)$; 2.° 当取 $b=\{\beta_i\}$, $\beta_i=1(i\leq n)$或$=0(i>n)$, T_1满足条件$(C;\partial D_K,b)$.

3) 由定理6得, 方程(1)在 $C_K\setminus D^0$中有非零解 $u=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0\cdots\}$, 显见 $r_0\leq\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\leq r$. 由于 $r_i>0(i>n)$, 故易见 $u=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0\cdots\}$是方程组(27)的一个非零解 □

参 考 文 献

[1] A. Canetti, G. Marino and G. Pietramala, *Nonlinear Anal*, TMA., 17: 1(1991), 11-20.

[2] K. Deimling, *Nonlinear Funct. Anal.*, Springer-Verlag, 1985.

[3] 杨书郎, 数学学报, 33: 6(1990), 828-835.

[4] 杨书郎, 应用数学学报, 13: 3(1990), 351-357.

[5] R. F. Brown, Pacif. J. Math., 115(1984), 277-297.

[6] 杨书郎, 高校应用数学学报, 8: 1(1993), 79-89.

On Some Problems for a Class of Mapping Equations in Hilbert Space

Yang Shulang

(Dept. of Automation, Xiamen University)

Abstract

The solutions and non-zero solutions of a class of mapping equations in Hilbert space are discussed using method from f_p-homotopy.

Keywords restruction, mapping equation, f_p-homotopy method.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.