有序集上的自由Ockham 代数的注记*

方 捷 吴丽云
(中山大学数学系, 广州510275) (广东民族学院计算机科学系, 广州510633)

摘 要 从构造有序集上的自由分配格出发, 证明了任意有序集上存在自由Ockham 代数

关键词 自由Ockham 代数, 同态
分类号 AMS(1991) 06A/CCL O151

一个Ockham 代数是一个具有偶自同态 f 的有界分配格(有关Ockham 代数的定义及基本性质请参见[1]). 设 I 是一个有序集, 称 I 上的一个映射 h 是保序的, 如果 $(\forall a, b\in I)\, a\leq b$ 蕴含着 $h(a)\leq h(b)$. 设$(L;f)$是一个Ockham 代数, φ是L 上的一个映射, 称φ是L 上的(Ockham)同态, 如果φ是一个格同态且满足: $\varphi(f(a)) = f[\varphi(a)], \forall a\in L$.

定义 称一个Ockham 代数L 在一个有序集 I 上是自由的, 如果

(1) 存在一个保序单射 $g: I\to L$ 使得 $g(I)$生成L;

(2) 对任意一个Ockham 代数M 和任意保序映射 $p: I\to M$, 存在Ockham 同态 $h: L\to M$ 使得 $h\circ g = p$.

Goldberg 已于1981年[2]证明, 任意一个分配格存在其自由Ockham 代数 本注记通过构造有序集上的自由分配格, 进一步证明, 任意有序集上也同样存在自由Ockham 代数 首先给出如下定理

定理1 设 I 是一个有序集 存在一个满足下面条件的分配格A:

(a_1) 存在一个保序单射 $g_1: I\to A$ 使得 $g_1(I)$生成A;

(b_1) 对任意一个分配格D 及任意保序映射 $p_1: I\to D$, 存在一个格同态 $h_1: A\to D$ 使得 $p_1 = h_1\circ g_1$.

证明 考虑由所有保序映射 $x: I\to B = \{0, 1\}$所组成的集 $E = B^I$. 对每一 $x\in E$, 记 $x(i) = x_i$, 并用$(x_i)_{i\in I}$表示 x. 令 $g_1(i) = G_i = \{x\in E \mid x_i = 1\}$, 则显然有 $G_i\neq\varnothing\ (\forall i\in I)$.

设A 是由 $G = \{G_i \mid i\in I\}$(在 E 的所有子集所组成的集2^E 中)所生成的一个集环 不难看出,A 是一个包含$\varnothing$和 E 的有界分配格, 且由 $g_1(I)$所生成 观察

$$i\leq j \Leftrightarrow g_1(i)\subseteq g_1(j), \qquad (*)$$

事实上, 如 $i\leq j$ 则 $x\in g_1(i) = G_i$ 蕴含 $x_j\geq x_i = 1$, 从而 $x\in G_j = g_1(j)$. 因此 $g_1(i)\subseteq g_1(j)$. 另一方面, 如 $i\not\leq j$, 设

* 1994年12月7日收到 1997年4月27日收到修改稿

$$x(k)=\begin{cases}1, & \text{如 } k\geq i,\\ 0, & \text{如 } k\ngeq i,\end{cases}$$

则 $x\in E$ 且 $x\in g_1(i)$ 及 $x\notin g_1(j)$, 故 $g_1(i)\nsubseteq g_1(j)$, 因此条件 (a_1) 成立.

现设 D 是一个分配格, 并设 $p_1: I\to D$ 是一个保序映射. 由[3, 定理7. 19], 可把 D 看成某个集 T 的子集环 T_0. 设 $p_1(i)=H_i\subseteq T$ 并设 k_i 是 H_i 的特征函数, 即

$$k_i(t)=\begin{cases}1 & \text{当 } t\in H_i,\\ 0 & \text{当 } t\notin H_i.\end{cases}$$

令 $k(t)=(k_i(t))_{i\in I}\ (t\in T)$. 给定 t, 则 $k_i(t)$ 是 $i\in I$ 的函数, 且当 $i\leq j$ 时, $p_1(i)=H_i\subseteq H_j=p_1(j)$, 即 $k_i(t)\leq k_j(t)$. 因此, 对每一固定的 $t\in T$, $k(t)\in E$. 从而 $k: T\to E$ 是一个映射. 现对 E 的任意子集 X, 令 $h_1(x)=k^{-1}(x)$. 容易验证, $h_1: 2^E\to 2^T$ 是一个格同态. 观察

$$t\in H_i\Leftrightarrow k_i(t)=1\Leftrightarrow k(t)\in G_i\Leftrightarrow t\in k^{-1}(G_i),$$

有 $k^{-1}(G_i)=H_i$ 且 $h_1\circ g_1=p_1$.

现考虑集 $A'\triangleq\{x\subseteq E\ |h_1(x)\in D\}$. 因 D 被看成一个集环且 h_1 是格同态, 故容易验证, A' 是 E 的子集环. 由 $h_1(G_i)=h_1(g_1(i))=p_1(i)\in D$ 可推知 $G_i\in A'\ (i\in I)$. 因此 $A\subseteq A'$, 从而知 h_1 是 A 到 D 的格同态. 所以条件 (b_1) 成立.

定理2 设 I 是一个有序集. 则存在由 I 所生成的自由 Ockham 代数.

证明 由定理1, 存在一个满足条件 (a_1) 和 (b_1) 的分配格 A. 再据[2, 定理3. 1]知存在由 A 所生成的一个自由 Ockham 代数 $(L; f)$, 即

(a_2) 存在一个保序单射 $g_2: A\to L$ 使得 $g_2(A)$ 生成 L;

(b_2) 对任意一个 Ockham 代数 M 和任意格同态 $h_1: A\to M$, 存在一个(Ockham)同态 $h: L\to M$ 满足 $h\circ g_2=h_1$. 令 $g=g_2\circ g_1$, 则 $g: I\to L$ 是一个保序单射, 且 $g(I)$ 生成 L. 据定理1及 (b_2) 知定义中条件(2)成立, 故 L 是 I 上的一个自由 Ockham 代数.

作者对 T. S. Blyth 教授和郭聿琦教授的一些有益建议深表谢意.

参 考 文 献

[1] T. S. Blyth and J. C. Varlet, Ockham algebras. Oxford University Press, 1994.

[2] M. S. Goldberg, *Distributive Ockham algobras: free algebras and injectivity*, Bull. Austral. Math. Soc., 24(1981), 161-203.

[3] G. Grätzer, *Lattice Theory*, Freeman and Co., San Francisco, 1971.

Note on the Ockham Algebra on Ordered Sets

Fang Jie

(Dept. of Math., Zhongshan Univ., Guangzhou 510275)

Wu Liyun

(Dept. of Comp. Scis., Guangdong Nationality College, Guangzhou 510633)

Abstract

In this note we construct a free distributive lattice on ordered set and show that there exists a free Ockham algebra on any order set I.

Keywords free Ockham algebra, homomorphism.