第18卷第1期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 1
1998年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1998

一类奇异非线性边界值问题正解的存在性和非唯一性*

郑连存
(东北大学热能工程系, 沈阳110006)

徐万达 (东北大学数学系, 沈阳110006)

赫冀成 (东北大学热能工程系, 沈阳110006)

摘 要 本文研究了一类奇异非线性边界值问题 $g^p(x)g''(x)+h(x)=0, -k<x<1, g'(-k)=C, g(1)=0, k>0$ 正解的存在性和非唯一性. 问题起源于幂律流体理论中著名的边界层方程 $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\gamma|\frac{\partial u}{\partial y}|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}), \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, u|_{y=0}=-U_w, v|_{y=0}=V_w(x), u|_{y=+\infty}=U_\infty$.

关键词 正解, 非唯一解, 奇异边界值问题
分类号 AMS(1991) 34A34/CCL O175.14

1 引 言

本文研究如下形式的奇异非线性边界值问题:

$$g^p(x)g''(x)+h(x)=0,\ -k<x<1, \tag{1.1}$$

$$g'(-k)=C,\quad g(1)=0\quad k>0, \tag{1.2}$$

其中 $h(x)$ 假定为定义在 $[-k,+\infty)$ 上的连续增函数且满足

$$M_2|x|^\sigma\le|h(x)|\le M_1|x|^\lambda, \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^\sigma}>M, \tag{1.4}$$

M_1, M_2, M 均为正常数, $p\ge1, 0<\lambda\le\sigma, \lambda-p+1>0$.

问题(1.1), (1.2)的一个直接物理背景来源于如下流体力学方程[4]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\gamma|\frac{\partial u}{\partial y})|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1.6}$$

$$u|_{y=0}=-U_w,\quad v|_{y=0}=V_w(x),\quad u|_{y=+\infty}=U_\infty. \tag{1.7}$$

引入流函数 $\varphi(x,y)$ 和相似变换 η

$$\varphi(x,y)=Ax^\alpha f(\eta),\ \eta=Bx^\beta y, \tag{1.8}$$

其中 A, B, α, β 为待定常数

* 1995年5月26日收到. 1997年9月12日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

选取 $\beta = -\alpha, AB = U_\infty$ 经过计算得:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = U_\infty f'(\eta),\ v = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -A\alpha x^{\alpha-1}[f(\eta) - \eta f'(\eta)]. \tag{1.9}$$

将(1.9)代入(1.5)-(1.7)并置 $\alpha =: \frac{1}{n+1}, B =: \left(\frac{U_\infty^{2-n}}{(n+1)\gamma}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 得

$$-f(\eta) f''(\eta) = (|f''(\eta)|^{n-1} f''(\eta))', \tag{1.10}$$

$$f(0) = -C, f'(0) = -k, f'(+\infty) = 1, \tag{1.11}$$

其中 $k = \frac{U_w}{U_\infty}, C = (n+1) B V_w(x) x^{\frac{n}{n+1}} / U_\infty$.

再引入 $x = f'(\eta)$ 的反函数 $\eta = \psi(x), 0 \le \eta < +\infty$, 并定义 $g(x) =: (f''(\psi(x)))^n, x \in [-k, 1)$ 代入(1.10), (1.11)最后可得

$$g''(x) = -x g^{-\frac{1}{n}}(x), \quad -k < x < 1, \tag{1.12}$$

$$g'(-k) = C, \quad g(1) = 0, \quad k > 0. \tag{1.13}$$

显然, 如上奇异边值问题为边值问题(1.1), (1.2)的一个特殊情况

2 主要结果

感兴趣的是问题在 $[-k, 1)$ 内的正解, 故可将(1.1), (1.2)改写为

$$g''(x) = -\frac{h(x)}{g^p(x)}, \quad -k < x < 1, \tag{2.1}$$

$$g'(-k) = C, \quad g(1) = 0, \quad k > 0. \tag{2.2}$$

不直接求解(2.1), (2.2), 而考虑如下初值问题

$$g''(x) = -\frac{h(x)}{g^p(x)}, \quad -k < x < 1, \tag{2.3}$$

$$g(-k) = \alpha, \quad g'(-k) = C, \quad k > 0. \tag{2.4}$$

现在的问题是寻求 $\alpha > 0$, 使(2.3), (2.4)的解在 $[-k, 1)$ 内为正, 并且 $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x, \alpha) = 0$.

定理1 如果 $C < 0, k, \sigma, \lambda, p$ 满足

(i) $-C \ge \left(\frac{M_1}{\lambda - p + 1} k^{\lambda - p + 1}\right)^{\frac{1}{p+1}}$;

(ii) $\frac{M_1}{M_2} k^{\lambda + 2} \le \frac{2(\lambda + 2)}{3^{\sigma + 2}}$;

(iii) $k > \left(\frac{M_1}{M_2} \frac{\sigma + 1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}\right)^{\frac{1}{\sigma + 1}}$,

则边界值问题(1.1), (1.2)有一个单调递减的解(满足 $\alpha > -Ck$), 和另一个有负的局部极小值和正的局部极大值的解(满足 $0 < \alpha < -Ck$).

定理2 如果 $C \ge 0$, 设

$$a_1 = C + 2\left(\frac{1}{2} M_1 k^{\lambda + 2}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \quad a_2 = C + \frac{M_1}{(\frac{1}{2} M_2 k^{\sigma + 2})^{p/(p+1)}} \frac{k^{\lambda + 1}}{\lambda + 1},$$

$$b_1=\left(\frac{C(\lambda+1)\alpha^p+\frac{\lambda+1}{\sigma+1}M_2k^{\sigma+1}}{M_1}\right)^{\frac{1}{\lambda+1}},$$

当 $\sigma>\lambda$ 并且 $b_1>\left(\frac{M_1}{M_2}\frac{\sigma+1}{\lambda-p+1}\right)^{\frac{1}{\sigma-\lambda}}$ 时, 设

$$b_2=\left[\frac{a_1a_2^{1/p}}{\left(\frac{M_2}{\sigma+1}\right)^{1/p}\cdot b_1^{(\sigma-\lambda)/p}-\left(\frac{M_2}{\lambda-p+1}\right)^{1/p}}\right]^{\frac{p}{x+1}},$$

当 $\sigma=\lambda$ 时, 设 $b_2=b_2^*$, 这里 b_2^* 是方程

$$a_1a_2^{1/p}+xa_2^{1+1/p}=\left(\frac{M_2}{\sigma+1}\right)^{1/p}x^{(\sigma+1)/p}\ (0<x<1)$$

的最大实根, $b_2^*=f(a_1,a_2,M_2,p,\sigma)$. 如果

$$b_2+\frac{\sqrt{2}\,(a_1+a_2b_2)^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{M_2b_1^{\sigma}}}<1,$$

则边值问题(1.1), (1.2)至少有两个解, 一个满足 $\alpha>\left(-\frac{1}{2}h(-k)\cdot k^2\right)^{1/(p+1)}$, 另一个满足 $0<\alpha<\left(-\frac{1}{2}h(-k)\cdot k^2\right)^{1/(p+1)}$, 两个解在 $[-k,\beta]$ 内(β 为解最大值点横坐标)都是递增的, 而在 $(\beta,1)$ 内是递减的

定理3　除了定理1的条件(i), (ii), (iii)外, 如果 λ, p, C, k 满足 $\lambda-2p+1>0$ 及

(iv)　$-C\geq\left(\frac{M_1k^{\lambda-2p+2}}{\lambda-2p+2}+\frac{M_1k^{\lambda-2p+1}}{\lambda+1}\right)^{\frac{1}{2p}}$;

(v)　$\frac{M_2}{M_1}>\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\left[(\lambda+2)k^{\lambda+1}+(\lambda+1)k^{\lambda+2}\right]$,

则边值问题(1.1), (1.2)有且仅有一个单调递减(满足 $\alpha>-Ck$)的解

3　证　明

首先不加证明给出如下四个引理, 关于它们的证明, 读者可仿照文[1]中定理1, 引理1-3给出

引理1　对每一个确定的值 C 和 $\alpha>0$ 初值问题(2.3), (2.4)有唯一正解. 设 $[-k,x_\alpha^*)$ 是正解存在的最大区间, 那么在 $[-k,x_\alpha^*)$ 内, $g(x,\alpha)>0$, 并且有

$$g(x_\alpha^*,\alpha)=\lim_{x\to x_\alpha^*}g(x,\alpha)=0.$$

引理2　对任何 C 值和任何 $\alpha>0$, 有 $x_\alpha^*\geq0$, 如果 $C\geq0$, 则有严格的不等式 $x_\alpha^*>0$.

引理3　对任何确定的 C, x_α^* 是 α 的一个连续函数

引理4　对任何确定的 C, 当 $\alpha\to+\infty$ 时, $x_\alpha^*\to+\infty$.

引理5　如果 $C<0$, $\alpha=-Ck$, 并且定理1的条件(i), (ii)成立, 则 $x_\alpha^*<1$.

证明　对 $\alpha\geq-Ck$, 因当 $-k<x<0$ 时 $g''(x)>0$, 故对 $-k\leq x\leq0$ 有 $g(x)\geq\alpha+C(x+k)$, 于是

$$g'(0) = C - \int_{-k}^{0} \frac{h(x)}{g^p(s)} ds \le \frac{-(-C)^p(\lambda - p + 1) + M_1 k^{\lambda - p + 1}}{(-C)^p(\lambda - p + 1)}.$$

由(i) $g'(0) \le 0$, 这蕴含当 $-k \le x \le 0$ 时 $g'(x) < 0$, 对 $\alpha = -Ck$ 有 $0 < g(0, \alpha) \le \frac{M_1 k^{\lambda+2}}{g^p(0,\alpha)(\lambda+2)}$, 故可得

$$0 < g(0,\alpha) < \left(\frac{M_1 k^{\lambda+2}}{\lambda+2}\right)^{1/(p+1)} = a. \qquad (3.1)$$

下面寻求 x_α^* 的上界, 注意到 $g'(0) = 0$, 得

$$g(x) \le f(x) = \begin{cases} a - \dfrac{M_2 \epsilon^\sigma}{2a^p}(x - \epsilon)^2, & \epsilon < x < x_a^* \\ a, & 0 \le x \le \epsilon \end{cases}$$

$f(x)$ 交 x 轴于点 $x = \epsilon + \sqrt{\frac{2a^{p+1}}{M_2 \epsilon^\sigma}} = 3\epsilon \le 1 \left(\epsilon = \left(\frac{a^{p+1}}{2M_2}\right)^{1/(\sigma+2)}\right)$.

由引理3-5即得到当 $C < 0$ 时, (1.1), (1.2) 满足 $\alpha > -Ck$ 的解的存在性的证明

下面证明当 $C < 0$ 时, (1.1) (1.2) 存在另外的解

引理6　设 C, k 除满足引理5的条件外, 又满足定理1的条件(iii), 则(1.1), (1.2)存在另外一解, 满足 $0 < \alpha < -Ck$, 且此解具有一个负的局部极小值点和一个正的局部极大值点

证明　如果 α 足够小, 因 C 为负, 由引理2, $g(x)$ 在某点 $r(-k < r < 0)$ 达到它的局部极小值 在 $[-k, r]$ 内考虑(2.3), (2.4)的解 当 α 足够小时, 对 $-k \le x \le r$, 有 $g(x, \alpha) \le \alpha$ 由 $g'(r) = 0$ 得

$$-C = -\int_{-k}^{r} \frac{h(s)}{g^p(s)} ds \ge \frac{M_2}{\alpha^p}[k^{\sigma+1} - (-r)^{\sigma+1}],$$

这蕴含当 $\alpha \to 0$ 时, $r \to -k$ 且 $g(r) \to 0$.

下面考虑当 α 充分小时, (2.3), (2.4) 在 $(r, 0)$ 内的解, 注意到 $g'(0, \alpha) = \int_r^0 \frac{h(s)}{g^p(s, \alpha)} ds > 0$, 解 $g(x)$ 在 $[r, 0]$ 内递增, 对 $r \le x \le 0$ 可得如下结果

$$\lim_{\alpha\to 0} g'(0) \ge \frac{M_2 k^{\sigma+1}}{g^p(0)(\sigma+1)}, \qquad \lim_{\alpha\to 0} g(0) \ge \left(\frac{k^{\sigma+2}}{\sigma+2} M_2\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

对充分小的 $\alpha > 0$, 有 $g'(0) > 0$, 由引理1知 $g(x)$ 必在某点 β 达到最大值, 并且和 x 轴交于点 x_α^*, 设 x_1 是使得 $g(0) = g(x_1)$ 的点, 则由积分表达式可得

$$g'(0) x_1 = \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - s) h(s)}{g^p(s)} ds \le \frac{M_1}{g^p(0)} \frac{x_1^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)}.$$

利用(iii)即得

$$\lim_{\alpha\to 0} x_\alpha^* \ge \lim_{\alpha\to 0} x_1 > 1.$$

由上式及引理3, 5即得引理6的证明, 由引理1-6即得定理1的证明

引理7　设 $C \ge 0$, $g(x)$ 为(2.3), (2.4)满足条件 $\alpha = [-\frac{1}{2}h(-k)k^2]^{1/(p+1)}$ 的解, $a_i, b_i (i = 1, 2)$ 定义同定理2, 如果 $b_2 + \frac{\sqrt{2}(a_1 + a_2 b_2)^{(p+1)/2}}{\sqrt{M_2 b_1^\sigma}} < 1$, 则 $x_\alpha^* < 1$.

证明　先推导 $g(0)$, $g'(0)$ 的上界, 因为对 $-k \le x \le 0$ 有

$$g(x) \le f(x) = -\frac{h(-k)}{2\alpha^p}(x+k)^2 + C(x+k) + \alpha,$$

故有

$$g(0) \le Ck + 2\left[\frac{1}{2}k^{\lambda+2}M_2\right]^{1/(p+1)} = a_1, \tag{3.6}$$

$$g'(0,\alpha) \le C + \frac{M_1}{\left(\frac{1}{2}M_2 k^{\sigma+2}\right)^{p/(p+1)}}\frac{k^{\lambda+1}}{\lambda+1} = a_2. \tag{3.7}$$

再求使 $g'(\beta) = 0$ 的 β 和 $g(\beta)$ 的上界, 注意到对 $0 \le x \le \beta$, $g(0) \le g(x) \le g(\beta)$ 故得

$$\frac{1}{g^p(\beta)}\int_0^\beta h(s)\,ds \le g'(0) \le \frac{1}{g^p(0)}\int_0^\beta h(s)\,ds, \tag{3.8}$$

$$g(\beta) \le g(0) + \beta g'(0). \tag{3.9}$$

由(3.8), (3.9)可得:

$$C\alpha^p + \frac{M_2 k^{\sigma+1}}{\sigma+1} \le g'(0)g^p(0) \le \frac{M_1}{\lambda+1}\beta^{\lambda+1},$$

由此即得

$$\beta \ge \left(\frac{C(\lambda+1)\alpha^p + M_2\frac{\lambda+1}{\sigma+1}k^{\sigma+1}}{M_1}\right)^{\frac{1}{\lambda+1}} = b_1. \tag{3.10}$$

又注意 $0 < x \le \beta$ 时 $g''(x) < 0$, 于是

$$[g'(0)]^{1/p}g(\beta) \le [g'(0)]^{1/p}g(0) + \left(\frac{M_1}{\lambda-p+1}\right)^{1/p}\beta^{(\lambda+1)/p}. \tag{3.11}$$

由(3.8), (3.10), (3.11)得

$$[g'(0)]^{1/p}g(0) \ge \left[\left(\frac{M_2}{\sigma+1}\right)^{1/p}b_1^{(\sigma-\lambda)/p} - \left(\frac{M_1}{\lambda-p+1}\right)^{1/p}\right]\beta^{(\lambda+1)/p}. \tag{3.12}$$

设 $A = \left(\frac{M_2}{\sigma+1}\right)^{1/p}b_1^{(\sigma-\lambda)/p} - \left(\frac{M_1}{\lambda-p+1}\right)^{1/p}$ 由引理条件知, 当 $\sigma > \lambda$ 时 $A > 0$, 由(3.12)即得,

$$\beta \le \left(\frac{a_1 a_2^{1/p}}{A}\right)^{\frac{p}{\lambda+1}} = b_2. \tag{3.13}$$

当 $\sigma = \lambda$ 时, 由(3.6)-(3.9)得

$$a_1 a_2^{1/p} + \beta a_2^{1+1/p} \ge \left(\frac{M_2}{\sigma+1}\right)^{1/p}\beta^{(\sigma+1)/p}.$$

设 b_2^* 是方程 $a_1 a_2^{1/p} + x a_2^{1+1/p} = \left(\frac{M_2}{\sigma+1}\right)^{1/p}x^{(\sigma+1)/p}$ $(0 < x < 1)$ 最大实根, 则显然有

$$\beta \le b_2 \le b_2^* = f(a_1, a_2, M_2, p, \sigma).$$

注意到当 $\beta \le x \le x_\alpha^*$ 时 $g(x) \le g(\beta) - \frac{h(\beta)}{2g^p(\beta)}(x-\beta)^2$, 故得

$$x_\alpha^* \le \beta + \sqrt{\frac{2g^{p+1}(\beta)}{h(\beta)}} \le b_2 + \frac{\sqrt{2}\left(a_1 + a_2 b_2\right)^{(p+1)/2}}{\sqrt{M_2 b_1^\sigma}} < 1.$$

引理8 设 $C \ge 0$, $g(x)$ 是(2,3), (2,4)的解, 则当 $\alpha \to 0$ 时, $g(0) \to +\infty$.

证明 由积分表达式, 一方面可得

$$\lim_{\alpha\to 0} g(0) \geq \left[(Ck)^{p+1} + \frac{M_2 k^{\sigma+2}}{\sigma+2} \right]^{1/(p+2)}, \tag{3.14}$$

另一方面还有

$$g(0) \geq \alpha + Ck + \frac{M_2 k^{\sigma+2}}{(\sigma+2)(g(0)-\alpha)} \begin{cases} \frac{1}{1-p}(g^{1-p}(0) - \alpha^{1-p}), & p > 1, \\ \ln \frac{g(0)}{\alpha}, & p = 1. \end{cases}$$

由上式及(3.14)即知, 当 $\alpha\to 0$时, $g(0)\to +\infty$.

由引理4, 7, 8即得定理2的证明.

下面证明定理3.

由定理1已经得到了解的存在性的证明, 现证明单调解的唯一性, 注意到对(1.1), (1.2)任何单调递减的解, 从积分表达式 $g(1) = 0 = \alpha + C(k+1) - \int_k^1 \frac{(1-s)h(s)}{g^p(s)} ds$ 得

$$\alpha + C(1+k) = \int_k^0 \frac{(1-s)h(s)}{g^p(s)} ds + \int_0^1 \frac{(1-s)h(s)}{g^p(s)} ds$$

$$\geq \frac{1}{g^p(0)} \left(\frac{M_2}{(\sigma+1)(\sigma+2)} - \frac{(\lambda+2)k^{\lambda+1} + (\lambda+1)k^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)} M_1 \right).$$

利用上式及(v)即得: $\alpha > -C(1+k)$.

现设 g_1, g_2是(1.1), (1.2)相应于 α_1, α_2的两个单调递减解且 $\alpha_1 > \alpha_2 > -Ck$, 在$[-k, 0]$的任何子区间$[-k, \xi]$(其中 $g_1 \geq g_2$), 有积分表达式

$$g_1(\xi) - g_2(\xi) = \alpha_1 - \alpha_2 + \int_k^{\xi} \frac{g_1^p(s) - g_2^p(s)}{g_1^p(s) g_2^p(s)} (\xi - s) h(s) ds.$$

因 $g_1^p(x) - g_2^p(x)$在$[-k, \xi]$递减且 $g_i(x) > Cx, x \in [-k, \xi], i = 1, 2$故当 $\alpha_1 > \alpha_2 > 1$或 $\alpha_1 > 1, 0 < \alpha_2 < 1$时有

$$g_1(\xi) - g_2(\xi) > (\alpha_1 - \alpha_2)\left(1 - \frac{M_1 k^{\lambda-2p+2}}{(\lambda-2p+2)C^{2p}}\right) > 0; \tag{3.15$_1$}$$

当$0 < \alpha_2 < \alpha_1 < 1$时有

$$g_1(\xi) - g_2(\xi) > (\alpha_1^p - \alpha_2^p)\left(1 - \frac{M_1 k^{\lambda-2p+2}}{(\lambda-2p+2)C^{2p}}\right) > 0, \tag{3.15$_2$}$$

这也蕴含当$-k \leq x \leq 1$时, $g_1(x) - g_2(x) \geq 0$. 另一方面注意到

$$|g_1'(0) - g_2'(0)| \leq \frac{M_1 k^{\lambda-2p+1}}{(\lambda+1)C^{2p}} (\alpha_1^p - \alpha_2^p), \tag{3.16}$$

$$0 > -\int_0^1 (1-s)\left(\frac{1}{g_2^p(s)} - \frac{1}{g_1^p(s)}\right) ds = g_1(0) - g_2(0) + g_1'(0) - g_2'(0)$$

$$\geq \begin{cases} (\alpha_1 - \alpha_2)\left(1 - \frac{M_1 k^{\lambda-2p+2}}{(\lambda-2p+2)C^{2p}} - \frac{M_1 k^{\lambda-2p+1}}{(\lambda+1)C^{2p}}\right), & \text{当 } \alpha_1 > \alpha_2 > 1 \text{ 或 } \alpha_1 > 1, 0 < \alpha_2 < 1, \\ (\alpha_1^p - \alpha_2^p)\left(1 - \frac{M_1 k^{\lambda-2p+2}}{(\lambda-2p+2)C^{2p}} - \frac{M_1 k^{\lambda-2p+1}}{(\lambda+1)C^{2p}}\right), & \text{当 } 0 < \alpha_2 < \alpha_1 < 1. \end{cases}$$

$$\geq 0.$$

这是一个矛盾, 定理得证.

类似可讨论当 $C \geq 0$时, (1.1), (1.2)正解的唯一性问题, 本文从略.

本文初期曾得到吉林大学数学系王俊禹教授的指导和帮助, 在此致谢!

参考文献

[1] E. Soewono, K. Vajravelu, and R. N. Mohapatra, *Existence and nonuniqueness of solutions of a singular nonlinear boundary layer problem*, J. Math. Anal. Appl., 159(1991), 251- 270.

[2] M. Y. Hussaini and W. D. Lakin, *Existence and nonuniqueness of similarity solutions of boundary layer problem*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 39(1986), 15- 24.

[3] M. Y. Hussaini, W. D. Lakin, and A. Nachman, *On similarity solutions of boundary lager problem with a upstream moving wall*, SIAM. J. Appl. Math., 47(1987), 699- 709.

[4] A. Nachman and A. J. Callegari, *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math., 38(1980). 275- 281.

Existence and Nonuniqueness of Positve Solutions to a Class of Singular Nonlinear Boundary Value Problems

Zheng Liancun

(Thermal Engineering Department, Northeastern University, Shenyang 110006)

Xu Wanda

(Dept. of Math., Northeastern University, Shenyang 110006)

He Jicheng

(Thermal Engineering Department, Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract

This paper studies the existence and nonuniqueness of positive solutions for a class of singular nonlinear boundary value problems $g^p(x)g''(x)+h(x)=0,\ -k<x<1,\ g'(-k)=C,\ g(1)=0,\ k>0$ which originates from the famous boundary layer equation in the theory of power law fluids

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\ u\big|_{y=0}=-U_w,\ v\big|_{y=0}=V_w(x),\ u\big|_{y=+\infty}=U_\infty.$$

Keywords positive solutions, nonunique solutions, singular boundary value problem.