一类时滞双曲方程的振动准则*

王培光
(河北大学数学系, 保定071002)

傅希林
(山东师范大学数学系, 济南250014)

俞元洪
(中国科学院应用数学所, 北京100080)

摘　要　本文考虑一类滞量为连续分布型的双曲偏泛函微分方程解的振动性质, 给出了这类方程在三类边值条件下解的振动准则.

关键词　时滞, 双曲型方程, 振动

分类号　AMS(1991) 35B05, 35L20/CCL O175.27

1　引　言

考虑如下具有连续分布滞量的中立型双曲偏微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[u+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)u(x,t-\tau_i)\Big]=a(t)\Delta u-p(x,t)u-\int_a^b q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]d\sigma(\xi)$$

$$(x,t)\in\Omega\times R_+=G \tag{1}$$

解的振动性质, 其中 Ω 为 R^n 中具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $R_+=[0,+\infty)$, $u=u(x,t)$, $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\partial^2 u/\partial x_i^2$, $\tau_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 均为实常数.

对于(1), 做如下假设

(H_1)　$a(t),\lambda_i(t)\in C(R_+,R_+)$　$i=1,2,\cdots,m$;

(H_2)　$p(x,t)\in C(\overline{\Omega}\times R_+,R_+)$, $q(x,t,\xi)\in C(\overline{\Omega}\times R_+\times[a,b],R_+)$;

(H_3)　$g(t,\xi)\in C(R_+\times[a,b],R)$; $g(t,\xi)\le t$, $\xi\in[a,b]$; $g(t,\xi)$ 关于 t, ξ 分别是非减的, 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$;

(H_4)　$\sigma(\xi)\in([a,b],R)$ 非减, 方程(1)中的积分为Stieltjes积分.

同时考虑如下三类边界条件

$$u(x,t)=\varphi(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\psi(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+, \tag{3}$$

* 1995年3月8日收到

$$\frac{\partial u}{\partial n} + r(x,t)u = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times R_+, \tag{4}$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $r(x,t) \in C(\partial\Omega \times R_+, R_+)$, $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t) \in C(\partial\Omega \times R_+, R)$.

近年来人们已开始关注含时滞的偏微分方程解的性态的研究 但是对含时滞的双曲型偏微分方程振动性的研究却很少见, 近年来仅有对滞量是离散型的几篇文献发表[1−3], 而对于滞量为连续分布型的双曲偏微分方程振动性的研究尚未曾见过 最近文[4, 5]讨论了具连续分布时滞的抛物偏微分方程和二阶常微分方程的振动性, 在本文中考虑滞量为连续分布型的双曲型方程(1)的振动性, 建立了方程(1)分别满足上述三类边界条件的解振动的充分性判据 因(1)中的积分为 Stieltjes 积分, 易知(1)包括了如下时滞双曲型方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[u + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) u(x, t-\tau_i)\right] = a(t)\Delta u - p(x,t)u - \sum_{j=1}^{s} q_j(x,t) u[x, g_j(t)] \quad (x,t) \in G.$$

方程(1)的满足某边界条件的解 $u(x,t)$ 称为在 $\Omega \times R_+ = G$ 内是振动的, 如果对每个正数 μ, 存在点 $(x_0, t_0) \in \Omega \times [\mu, +\infty)$, 使得 $u(x_0, t_0) = 0$ 否则称解 $u(x,t)$ 在 G 内是非振动的

2 引 理

利用偏微分方程的基本结论: Ω 内的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的最小特征值 α_1 是正的, 且 α_1 所对应的特征函数 $\Phi(x)$ 在 Ω 内也是正的 可证明下列引理

引理1 若 $u(x,t)$ 是问题(1), (2)在 $\Omega \times [\mu, +\infty)$ 上的一正解, $\mu \geq 0$, 则具连续分布滞量中立型微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[U(t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) U(t-\tau_i)\right] + (P(t) + \alpha_1 a(t))U(t) + \int_a^b Q(t,\xi) U[g(t,\xi)] d\sigma(\xi)$$
$$\leq - a(t) \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\omega \tag{5}$$

有最终正解

$$U(t) = \int_\Omega u(x,t)\Phi(x)dx, \tag{6}$$

其中 $P(t) = \min_{x \in \Omega}\{p(x,t)\}$, $Q(t,\xi) = \min_{x \in \Omega}\{q(x,t,\xi)\}$.

证明 设 $u(x,t)$ 是问题(1), (2)在 $\Omega \times [\mu, +\infty)$ 上的一正解, $\mu \geq 0$ 注意到

$$\lim_{t \to +\infty} \min_{\xi \in [a,b]} \{g(t,\xi)\} = +\infty,$$

可知存在 $t_1 > \mu$, 使得 $g(t,\xi) \geq \mu$, $(t,\xi) \in [t_1, +\infty) \times [a,b]$, 且同时有 $t - \tau_i \geq \mu$, $t \geq t_1$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 于是 $u(x, g(t,\xi)) > 0$, $(x,t,\xi) \in \Omega \times [t_1, +\infty) \times [a,b]$, 且

$$u(x, t-\tau_i) > 0, \ (x,t) \in \Omega \times [t_1, +\infty), \ i = 1, 2, \cdots, m.$$

对方程(1)两边同乘 $\Phi(x)$, 后在 Ω 上关于 x 积分得

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_\Omega u\Phi(x)dx + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \int_\Omega u(x, t-\tau_i)\Phi(x)dx\right]$$
$$= a(t)\int_\Omega \Delta u \Phi(x)dx - \int_\Omega p(x,t)u\Phi(x)dx$$

$$- \int_\Omega \int_a^b q(x, t, \xi) u[x, g(t, \xi)] \Phi(x) d\sigma(\xi) dx, \quad t \geq t_1. \tag{7}$$

利用 Green **公式得**

$$\int_\Omega \Delta u(x, t) \Phi(x) dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x) \frac{\partial}{\partial n} u(x, t) - u(x, t) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(x)\right) d\omega + \int_\Omega u(x, t) \Delta\Phi(x) dx$$

$$= - \int_{\partial\Omega} \varphi(x, t) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(x) d\omega - \alpha_1 \int_\Omega u(x, t) \Phi(x) dx, \quad t \geq t_1. \tag{8}$$

易知如下积分次序可以交换

$$\int_\Omega \int_a^b q(x, t, \xi) u[x, g(t, \xi)] \Phi(x) d\sigma(\xi) dx$$

$$= \int_a^b \int_\Omega q(x, t, \xi) u[x, g(t, \xi)] \Phi(x) dx d\sigma(\xi), \tag{9}$$

于是, **由**(7), (8), (9) **得**

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_\Omega u\Phi(x) dx + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \int_\Omega u(x, t - \tau_i) \Phi(x) dx\right]$$

$$\leq - a(t) \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\omega - \alpha_1 a(t) \int_\Omega u\Phi(x) dx - P(t) \int_\Omega u\Phi(x) dx$$

$$- \int_a^b Q(t, \xi) \left(\int_\Omega u(x, g(t, \xi)) \Phi(x) dx\right) d\sigma(\xi), \quad t \geq t_1.$$

此示由(6) **给出的函数** $U(t)$ **是不等式**(5) **的最终正解**

引理2　**若** $u(x, t)$ **是问题**(1), (3) **在** $\Omega \times [\mu, +\infty)$ **上的一正解**, $\mu \geq 0$, **则具连续分布滞量中立型微分不等式**

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[V(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) V(t - \tau_i)\right] + P(t) V(t) + \int_a^b Q(t, \xi) V[g(t, \xi)] d\sigma(\xi)$$

$$\leq a(t) \int_{\partial\Omega} \psi d\omega \tag{10}$$

有最终正解

$$V(t) = \int_\Omega u(x, t) dx. \tag{11}$$

证明　**设** $u(x, t)$ **是问题**(1), (3) **在** $\Omega \times [\mu, +\infty)$ **上的一正解**, $\mu \geq 0$. **则与引理**1**证明类似可知**, **存在** $t_1 > \mu$, **使得**

$$u(x, g(t, \xi)) > 0, \ (x, t, \xi) \in \Omega \times [t, +\infty) \times [a, b],$$

且

$$u(x, t - \tau_i) > 0, \ (x, t) \in \Omega \times [t_1, +\infty), \ i = 1, 2, \cdots, m.$$

利用 Green **公式有**

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = \int_{\partial\Omega} \psi d\omega, \quad t \geq t_1. \tag{12}$$

对(1) **两边在** Ω **上关于** x **积分**, **并注意到**(9), (12), **有**

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_\Omega u(x, t) dx + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \int_\Omega u(x, t - \tau_i) dx\right]$$

$$\leq a(t)\int_{\partial\Omega}\psi d\omega - P(t)\int_{\Omega}u(x,t)dx$$

$$-\int_a^b Q(t,\xi)\left(\int_{\Omega}u(x,g(t,\xi))dx\right)d\sigma(\xi),\quad t\geq t_1.$$

此示由(11)给出的函数 $V(t)$ 是不等式(10)的最终正解.

引理3 若 $u(x,t)$ 是问题(1),(4)在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$ 上的一正解, $\mu\geq 0$, 则具连续分布滞量中立型微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[V(t)+\sum_{i=1}^m\lambda_i(t)V(t-\tau_i)\right]+P(t)V(t)+\int_a^b Q(t,\xi)V[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leq 0 \tag{13}$$

有最终正解 $V(x,t)=\int_{\Omega}u(x,t)dx$.

证明 设 $u(x,t)$ 是问题(1),(4)在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$ 上的一正解, $\mu\geq 0$. 则存在 $t_1>\mu$, 使得

$$u(x,g(t,\xi))>0,\ (x,t,\xi)\in\Omega\times[t,+\infty)\times[a,b]$$

且

$$u(x,t-\tau_i)>0,\ (x,t)\in\Omega\times[t_1,+\infty),\ i=1,2,\cdots,m.$$

利用 Green 公式有

$$\int_{\Omega}\Delta u dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}d\omega=-\int_{\partial\Omega}ru d\omega\leq 0. \tag{14}$$

对(1)两边在 Ω 上关于 x 积分, 并注意到(9),(14),有

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_{\Omega}u(x,t)dx+\sum_{i=1}^m\lambda_i(t)\int_{\Omega}u(x,t-\tau_i)dx\right]$$

$$\leq -a(t)\int_{\partial\Omega}ru d\omega - P(t)\int_{\Omega}u(x,t)dx-\int_a^b Q(t,\xi)\left(\int_{\Omega}u(x,g(t,\xi))dx\right)d\sigma(\xi)$$

$$\leq -P(t)\int_{\Omega}u(x,t)dx-\int_a^b Q(t,\xi)\left(\int_{\Omega}u(x,g(t,\xi))dx\right)d\sigma(\xi),\quad t\geq t_1.$$

此示函数 $V(t)=\int_{\Omega}u(x,t)dx$ 是不等式(13)的最终正解.

3 主要结果

定理1 若具连续分布滞量微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[U(t)+\sum_{i=1}^m\lambda_i(t)U(t-\tau_i)\right]+(P(t)+\alpha_1 a(t))U(t)$$

$$+\int_a^b Q(t,\xi)U[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leq -a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\omega \tag{15}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[U(t)+\sum_{i=1}^m\lambda_i(t)U(t-\tau_i)\right]+(P(t)+\alpha_1 a(t))U(t)$$

$$+\int_a^b Q(t,\xi)U[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leq a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\omega \tag{16}$$

没有最终正解, 则问题(1),(2)的每个解在 G 内是振动的.

证明 设 $u(x,t)$ 是问题(1),(2)的一非振动解, 不妨设 $u(x,t)>0$, $(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$,

$\mu\geq 0$. 则由引理1知(6)所定义的函数 $U(t)$ 是不等式(15)的最终正解, 与定理条件矛盾.

若 $u(x,t)<0,\ (x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$, 则令

$$\tilde{u}(x,t)=-u(x,t),\quad (x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty).$$

易验证 $\tilde{u}(x,t)$ 是问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[u+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)u(x,t-\tau_i)\right]=a(t)\Delta u-p(x,t)u\\ \qquad -\displaystyle\int_a^b q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]d\sigma(\xi),\quad (x,t)\in G\\ u(x,t)=-\varphi(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+\end{cases}$$

的一正解, 且满足

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_\Omega \tilde{u}\Phi(x)dx+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)\int_\Omega \tilde{u}(x,t-\tau_i)\Phi(x)dx\right]\\ &\leq -a(t)\int_{\partial\Omega}(-\varphi)\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\omega-\alpha_1 a(t)\int_\Omega \tilde{u}\Phi(x)dx\\ &\quad -P(t)\int_\Omega \tilde{u}\Phi(x)dx-\int_a^b Q(t,\xi)\left(\int_\Omega \tilde{u}(x,g(t,\xi))\Phi(x)dx\right)d\sigma(\xi).\end{aligned}$$

可知函数 $\tilde{u}(t)=\int_\Omega \tilde{u}(x,t)\Phi(x)dx$ 是微分不等式(16)的最终正解, 与定理条件矛盾. 由此可知问题(1), (2)的每个解在 G 内是振动的.

定理2 若对所有充分大的 t_1, 有

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega\right]ds=-\infty,\tag{17}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega\right]ds=+\infty,\tag{18}$$

则问题(1), (2)的每个解在 G 内是振动的.

证明 设问题(1), (2)存在非振动解, 如果对某 $\mu\geq 0$ 在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$ 上有 $u(x,t)>0$. 则由引理1知(6)所定义的函数 $U(t)$ 是不等式(15)的最终正解, 于是有

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[U(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)U(t-\tau_i)\right]\leq -a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\omega,\quad t\geq t_1\geq\mu.\tag{19}$$

在区间 $[t_1,t]$ 上积分(19)两次得

$$U(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)U(t-\tau_i)\leq c_1+c_2(t-t_1)+\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{\eta}\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega\right]dsd\eta,$$

其中 c_1, c_2 为常数. 注意到

$$\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{\eta}\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega\right]dsd\eta=\int_{t_1}^{t}(t-s)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega\right]ds,$$

对上不等式两边同除 t 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\left[U(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)U(t-\tau_i)\right]\\ &\leq\frac{c_1}{t}+c_2\left(1-\frac{t_1}{t}\right)+\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega\right]ds.\end{aligned}$$

由(17)可推知

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left[U(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)U(t-\tau_i)\right]=-\infty.$$

此与$U(t)>0,\ t\geq\mu$相矛盾.

若$u(x,t)<0,\ (x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$. 则令$\tilde{u}=-u$, 可知函数$\tilde{U}(t)=\int_\Omega\tilde{u}(x,t)\Phi(x)dx$是不等式(16)的最终正解. 注意到利用(18)得

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_1^t\left(1-\frac{s}{t}\right)a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega ds$$

$$=-\limsup_{t\to+\infty}\int_1^t\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)d\omega\right]ds=-\infty,$$

从而亦可用与上面类似的方法推得矛盾. □

推论1 若具连续分布滞量微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[U(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)U(t-\tau_i)\right]+(P(t)+\alpha_1a(t))U(t)$$

$$+\int_a^bQ(t,\xi)U[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leq 0 \tag{20}$$

没有最终正解, 则方程(1)满足边界条件

$$u(x,t)=0\quad(x,t)\in\partial\Omega\times R_+ \tag{21}$$

的每个解在G内是振动的.

证明 在定理1中令$\varphi\equiv0$即得证.

定理3 若具连续分布滞量微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[V(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)V(t-\tau_i)\right]+P(t)V(t)$$

$$+\int_a^bQ(t,\xi)V[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leq a(t)\int_{\partial\Omega}\psi d\omega, \tag{22}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[V(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)V(t-\tau_i)\right]+P(t)V(t)$$

$$+\int_a^bQ(t,\xi)V[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leq -a(t)\int_{\partial\Omega}\psi d\omega \tag{23}$$

没有最终正解, 则问题(1), (3)的每个解在G内是振动的.

证明 设$u(x,t)$是问题(1), (3)的一非振动解. 若$u(x,t)>0,\ (x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty),\ \mu\geq0$. 则根据引理2知由(11)定义的函数$V(t)$是不等式(22)的最终正解, 与定理条件矛盾. 若$u(x,t)<0$, 则$\tilde{u}=-u$是问题

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[u+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)u(x,t-\tau_i)\right]=a(t)\Delta u-p(x,t)u$$

$$-\int_a^bq(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]d\sigma(\xi),\quad(x,t)\in G,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\psi,\quad(x,t)\in\partial\Omega\times R_+$$

的正解, 则由引理2知函数 $\tilde{V}(t)=\int_{\Omega}\tilde{u}(x,t)dx$ 是不等式(23)的正解, 亦导致矛盾. □

如下定理的证明与定理2类似

定理4　若对所有充分大的 t_1, 有

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)a(s)\int_{\Omega}\Psi(x,s)d\omega ds=-\infty, \tag{24}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)a(s)\int_{\Omega}\Psi(x,s)d\omega ds=+\infty, \tag{25}$$

则问题(1), (3)的每个解在 G 内是振动的.

利用引理3, 与定理3的证明类似可证如下定理

定理5　若具连续分布滞量微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[V(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)V(t-\tau_i)\right]+P(t)V(t)$$
$$+\int_a^b Q(t,\xi)V[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leq 0 \tag{26}$$

没有最终正解, 则问题(1), (4)的每个解在 G 内是振动的.

参　考　文　献

[1] D. P. Mishev, Hiroshima Math. J., 16(1986), 77- 83.

[2] D. P. Mishev and D. D. Bainov, Funkcial Ekvac, 29: 2(1986), 213- 218.

[3] N. Yoshida, Diff. Integral Eqs, 3(1990), 155- 160.

[4] Yu Yuanhong and Fu Xilin, Radovi Mathmatički, 7(1991), 167- 176.

[5] 傅希林, 俞元洪, 一类偏泛函微分方程的强迫振动, 非线性振动, 分叉及浑沌论文集, 天津大学出版社, 1992.

Oscillatory Criteria for Certain Delay Hyperbolic Equations

Wang Peiguang

(Dept. of Math., Hebei University, Baoding 071002)

Fu Xilin

(Dept. of Math., Shandong Normal University, Jinan 250014)

Yu Yuanhong

(Inst. of Appl. Math., Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract

In this paper, the oscillatory properties is considered for solutions of hyperbolic partial functional differential equations with delay of continuous distribution. The oscillatory criteria is given for these equations under three boundary conditions.

Keywords　delay, hyperbolic equations, oscillation.