第18卷第1期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 1
1998年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1998

弱半单纯 Banach 代数的完备范数拓扑唯一性*

韩 流 冰

(西南交通大学应用数学系, 成都610031)

摘 要 本文证明了弱半单纯Banach 代数的完备范数拓扑在等价意义下的唯一性

关键词 半单纯, 弱半单纯

分类号 AMS(1991) 46H/CCL O177.6

1 问题的提出

前苏联数学家 Gelfand 提出的Banach 代数的拓扑唯一性问题, 引起了人们的极大兴趣 1967年 Johnson 证明了著名的范数唯一性定理, 即交换的半单纯的Banach 代数具有唯一的范数拓扑[1]. 多年来, 人们围绕这个问题继续做了大量的工作 例如[2]得到了交换的半单纯 Frechet 代数的拓扑唯一性, [3]得到了局部凸 Frechet 代数的拓扑唯一性 本文讨论弱半单纯 Banach 代数的范数拓扑唯一性, 由于取消了 Johnson 定理中的交换条件, 并将半单纯条件放宽为弱半单纯, 故本文结论有着明显的意义

设A 是一个代数, $\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是使A 成为Banach 代数的任意两范数, 本文欲证明$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是等价的, 即存在 $a>0$, $b>0$, 使

$$a\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq b\|x\|_1,\quad \forall x\in A.$$

定义算子J: $(A,\|\cdot\|_1)\to(A,\|\cdot\|_2)$ 使$Ax=x$, $\forall x\in A$. 则J 是保持代数结构不变的1-1的满射, 称为代数同构 显然$\|\cdot\|_1$等价于$\|\cdot\|_2$当且仅当代数同构J 是一个同胚映射 值得注意的是代数同构是纯粹的代数性质, 而同胚映射则具有非常强的拓扑性

2 对代数同构的分析

记$X=(A,\|\cdot\|_1)$, $Y=(A,\|\cdot\|_2)$, 则J 是Banach 代数X 和Y 之间的代数同构 设

$$G(J)=\{(x,Jx)\,|\,x\in X\}$$

为算子J 的图, 记G 为$G(J)$在积空间$X\times Y$ 中的闭包 设P 和Q 分别为G 到X, Y 的自然投影, 即$P(x,y)=x$, $Q(x,y)=y$. 记$N(P)$, $N(Q)$分别为P, Q 的零空间, 显然

$$N(P)=\{(0,y)\,|\,(0,y)\in G\},\ N(Q)=\{(x,0)\,|\,(x,0)\in G\}.$$

引理1 (1)$QN(P)=JPN(Q)$; (2)由J 诱导的由$X/PN(Q)$到$Y/QN(P)$的线性算子$\hat{J}$:

* 1994年6月29日收到 1997年4月5日收到修改稿

$x+PN(Q)=Jx+QN(P)$是线性同胚映射.

引理2 J 的共轭算子 J^* 是线性同胚, 且

$$\mathrm{def}(J^*)=QN(P)^{\perp};\ \mathrm{Range}(J^*)=PN(Q)^{\perp}.$$

证明 设 π_1,π_2 分别为 X, Y 到 $X/PN(Q)$ 和 $Y/QN(P)$ 的商映射, 则有如下映射图

$$Y\xrightarrow{\pi_2}Y/QN(P)\xleftarrow{\hat{J}}X/PN(Q)\xleftarrow{\pi_1}X,$$

考虑共轭映射并由闭值域定理[4]知

$$QN(P)^{\perp}\xrightarrow{(\pi_2^*)^{-1}}(Y/QN(P))^*\xrightarrow{\hat{J}^*}(X/PN(Q))^*\xrightarrow{\pi_1^*}PN(Q)^{\perp},$$

而且映射

$$\pi_1^*\hat{J}^*(\pi_2^*)^{-1}:\ QN(P)^{\perp}\to PN(Q)^{\perp}$$

是线性同胚. 又因为 $\forall g\in QN(P)^{\perp}$, $\exists\ \hat{g}\in(Y/QN(P))^*$, 使 $g=\pi_2^*\hat{g}$, 且 $\forall x\in X$,

$$\langle Jx,g\rangle=\langle Jx+QN(P),\hat{g}\rangle,$$

所以

$$\langle x,\pi_1^*\hat{J}^*(\pi_2^*)^{-1}g\rangle=\langle x+PN(Q),\hat{J}^*(\pi_2^*)^{-1}g\rangle=\langle Jx+QN(P),(\pi_2^*)^{-1}g\rangle$$
$$=\langle Jx+QN(P),\hat{g}\rangle=\langle Jx,g\rangle,$$

故 $g\in\mathrm{def}(J^*)$. 所以 $QN(P)^{\perp}\subset\mathrm{def}(J^*)$ 且

$$J^*g=\pi_1^*\hat{J}^*(\pi_2^*)^{-1}g,$$

另一方面, $\forall g\in\mathrm{def}(J^*)$, 记 $f=J^*g$, 则 $\forall x\in X$, $\langle x,f\rangle=\langle Jx,g\rangle$. 而 $\forall Jx\in QN(P)$, 一定存在 $\{x_n\}\subset X$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,Jx_n)=(0,Jx)$. 那么

$$\langle Jx,g\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle Jx_n,g\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,f\rangle=0,$$

故 $g\in QN(P)^{\perp}$, 所以 $\mathrm{def}(J^*)\subset QN(P)^{\perp}$. 综上所证得

$$\mathrm{def}(J^*)=QN(P)^{\perp},\ \mathrm{Range}(J^*)=PN(Q)^{\perp}.$$

$J^*=\pi_1^*\hat{J}^*(\pi_2^*)^{-1}$是线性同胚.

3 有关弱半单纯 Banach 代数的说明

定义 称Banach 代数 A 为弱半单纯的是指

$$\bigcap_{f\in M(A)}\ker f=\{0\},$$

这里 $M(A)$ 为 A 上乘积线性泛函全体, $\ker f$ 为 f 的零空间, 而称 f 是乘积线性泛函是指

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\text{ 且 }f(xy)=f(x)f(y).$$

记 $R(A)$ 为 A 的根基, 即 $R(A)$ 为 A 的全体极大理想之交. 熟知 A 是半单纯的当且仅当 $R(A)=\{0\}$, 由于 $\forall f\in M(A)$, $\ker f$ 都是 A 的极大理想[5], 所以

$$\bigcap_{f\in M(A)}\ker f\subset R(A),$$

故半单纯的Banach 代数一定是弱半单纯的.

4　定理及证明

定理　弱半单纯的Banach 代数之间的代数同构一定是代数同胚

证明　设X, Y为弱半单纯的Banach 代数, J为由X到Y的代数同构 $\forall g \in M(Y)$, 构造X上泛函f为

$$\langle x, f\rangle = \langle Jx, g\rangle,$$

显然f是X上的乘积线性泛函, 故f连续[6], 且$f = J^* g$, 所以$g \in \mathrm{def}(J^*)$, 故$M(Y) \subset \mathrm{def}(J^*)$, 由引理 2 知$M(Y) \subset \mathrm{QN}(P)^{\perp}$, 所以$\forall f \in M(Y)$, 有

$$\mathrm{QN}(P) \subset \ker f,$$

故$\mathrm{QN}(P) \subset \bigcap_{f \in M(Y)} \ker f = \{0\}$, 从而有$\mathrm{QN}(P) = \{0\}$, 注意到$Q: N(P) \to \mathrm{QN}(P)$的表示为$Q(0, y) = y$, 所以$N(P) = \{0\}$, $G(J) = G$. 即J是一个闭算子, 由闭图象定理和逆算子定理知J是一个代数同胚

推论　弱半单纯的Banach 代数的范数拓扑是唯一的

参　考　文　献

[1] B. E. Johnson, *The uniqueness of the complete norm topology*, Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 537- 539.

[2] R. L. Carpenter, *Uniqueness of topology for commutative semisimple F-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., 29(1971), 113- 117.

[3] 关　波, 局部凸F-代数的拓扑唯一性与异算子系的连续性, 数学学报, 31: 5(1988), 577- 583.

[4] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, World Publishing Corporation Beijing China, 1985, 131- 134.

[5] 定光桂, 巴拿赫空间引论, 科学出版社, 1984, 482- 483.

[6] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Academic Press New York and London, 1972, 39- 40.

The Uniqueness of the Complete Norm Topology for Weak Semisimple Banach Algebra

Han Liubin

(Dept. of Appl. Math., Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

Abstract

In this paper, the uniqueness of the complete norm topology for weak semisimple banach algebra is proved.

Keywords　semisimple, weak semisimple.