第18卷第1期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 1
1998年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1998

选择理论中两个结论的改进*

燕 鹏 飞
(安徽大学数学系, 合肥230039)

摘 要 本文利用可数序基的概念, 讨论了下半连续集值映射的选择问题, 改进了选择理论中的两个经典结论

关键词 连续选择, 可数序基
分类号 AMS(1991) 54C/CCL O189

1 引 言

本文主要考虑取值于具有可数序基的空间内集值映射的选择问题, 我们首先给出有关的概念和表示

设 X, Y 为拓扑空间, 则

$2^X=\{E: E$ 是 X 是非空子集$\}$;

$F(X)=\{E: E$ 是 X 的非空闭子集$\}$;

$C(X)=\{E: E$ 是 X 的非空紧子集$\}$.

定义1[1] 集值映射 $\varphi: X\to 2^Y$ 称为下半连续(上半连续) 的, 如果对 Y 的每个开集 V, $\varphi^-(V)=\{x: \varphi(x)\cap V\neq\varnothing\}$ (集合 $\{x: \varphi(x)\subset V\}$) 均是 X 的开集

上半连续和下半连续集值映射又分别简称为 u. s. c 和 l. s. c 的

若对某个集值映射 $\varphi: X\to 2^Y$, 连续映射 $f: X\to Y$ 满足 $f(x)\in\varphi(x)$, 则称 f 为 φ 的一个连续选择

E. Michael[1], [2] 对下半连续集值映射的选择问题进行了深入的研究并得到如下结论

定理1.1[1] 设 X 是零维仿紧空间, Y 为完备度量空间, $\varphi: X\to F(Y)$ 为 l. s. c 的, 则 φ 存在连续选择

定理1.2[2] 设 X 是仿紧空间, Y 是完备度量空间, $\Phi: X\to F(Y)$ 为 l. s. c 的, 则存在一个 l. s. c 集值映射 $\varphi: X\to C(Y)$ 和 u. s. c 集值映射 $\psi: X\to C(Y)$ 使得任意 $x\in X$, $\varphi(x)\subset\psi(x)\subset\Phi(x)$.

Michael 在上述定理的证明中所使用的基本技巧就是利用象空间的度量进行逼近构造选择, 这种方法在选择理论中被广泛的应用 一个自然的问题是当象空间不具备度量性时, 能否利用一种较弱的拓扑结构代替度量 本文将利用可数序基的概念, 推广和改进了 Michael 的结

* 1994年9月6日收到 1997年8月29日收到修改稿

论

定义 2[3] 设 X 为拓扑空间, 若 X 的一个基 $\mathbf{B}$ 满足条件: $\mathbf{B}$ 的任何含有 p 的由不同元素所构成的序列 $B_1 \supset B_2 \cdots \supset B_n \cdots$ 形成 p 点的邻域基, 则称 $\mathbf{B}$ 为 X 的一个可数序基

Wick 和 Worrel 给出了具有可数序基的空间的一个有用的刻画

定理 1.3[4] 空间 X 具有可数序基当且仅当它存在序列 $\{\mathbf{B}_n\}$ 满足

(a) 每个 $\mathbf{B}_n$ 是 X 的一个基;

(b) 如果对每个 $n \ge 1$ 有 $B_n \in \mathbf{B}_n$ 且 $B_n \supseteq B_{n+1}$, 点 $p \in \bigcap_{n\in N} B_n$, 则 $\{B_n, n \ge 1\}$ 是 p 点的基

本文所讨论空间均指正则 T_2 空间

2 关于选择的定理

引理 2.1 设 X 是零维仿紧空间, Y 为具有可数序基的空间, $\varphi: X \to F(Y)$ 是 l s c 的, 则存在:

(1) Y 的满足条件(a), (b) 的基的序列 $\mathbf{B}_n = \{V^n_\alpha \mid \alpha \in A_n\}, n = 1, 2\cdots$;

(2) X 的离散开覆盖列 $\mathbf{U}_n = \{U^n_\alpha \mid \alpha \in A_n\}, n = 1, 2\cdots$;

(3) 映射列 $\pi_n: A_{n+1} \to A_n$, $n = 1, 2\cdots$.

满足条件:

$$U^n_\alpha = \bigcup \{U^{n+1}_\beta \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\};$$
$$V^n_\alpha = \bigcup \{V^{n+1}_\beta \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\};$$
$$U^n_\alpha \subset \varphi^{-1}(V^n_\alpha);$$
$$\overline{V^{n+1}_\alpha} \subset V^n_{\pi_n(\alpha)}, \alpha \in A_{n+1}, n = 1, 2\cdots.$$

证明 采用归纳法构造上述序列, Y 存在满足定理 1.3 条件的序列 $\{\mathbf{B}_n'\}$, 设 $\mathbf{B}_n' = \{W^n_\alpha \mid \alpha \in \wedge_n\}$, 则 $\varphi^{-1}(\mathbf{B}_1')$ 构成 X 的一个开覆盖, 由著名的 Dowker-Morita[6] 定理知, 它存在一个离散的一一开加细 $\mathbf{U}_1$, 不妨设 $\mathbf{U}_1 = \{U^1_\alpha \mid \alpha \in \wedge_1\}$, 令 $A_1 = \wedge_1, V^1_\alpha = W^1_\alpha, \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1'$. 则 $\mathbf{U}_1, \mathbf{B}_1$ 即为所求 由于 $U^1_a = X - \bigcup_{\beta \ne \alpha} U^1_\beta$, 故 U^1_α 为 X 的即开又闭集, 因而 $\dim(U^1_\alpha) \le 0$, 对于每个 $\alpha \in A_1$, 作 $v_\alpha = \{W^2_\beta \mid \beta \in \wedge_2 且 \overline{W^2_\beta} \subset V^1_\alpha\}$, 则 υ_α 为 V^1_α 的一个开覆盖, 对每个 $W^2_\beta \in \upsilon_\alpha$, 令 $V^2_{\langle\alpha,\beta\rangle} = V^1_\alpha \cap W^2_\beta$, 则 $\varphi^{-1}(\upsilon_\alpha)$ 存在在 U^1_α 内的离散一一开加细 $\{U^2_{\langle\alpha,\beta\rangle}, U^2_{\langle\alpha,\beta\rangle} \subset \varphi^{-1}(V^2_{\langle\alpha,\beta\rangle})\}$, 记此集簇为 $\mathbf{U}_\alpha$ 令

$$\mathbf{B}_2 = \bigcup_{\alpha\in A_1} \upsilon_\alpha, \mathbf{U}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A_1} \mathbf{U}_\alpha, A_2 = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \alpha \in A_1, V_{\langle\alpha,\beta\rangle} \in \upsilon_\alpha\},$$

作 $\pi_1: A_2 \to A_1$ 为投影, 则易证所得覆盖和映射满足条件(1), (2), (3), 重复上述过程, 不失一般性可得到所需的覆盖列和映射列

定理 2.1 设 X 为零维仿紧空间, Y 为具有可数序基的空间, $\varphi: X \to C(Y)$ 是 l s c 的, 则 φ 存在连续选择

证明 设 $\mathbf{U}_n, \mathbf{B}_n$ 为上述引理中的覆盖列, π_n 为映射列, 下面我们构造选择 f:

$\forall x \in X$, 由 $\mathbf{U}_n$ 的性质知, 存在 $\mathbf{U}_n$ 的元素 $U^n_{\alpha_n}$ 使 $x \in U^n_{\alpha_n}$, 则 $U^n_{\alpha_n}$ 被 x 所唯一确定且满足 $\pi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$. 由于 $U^n_{\alpha_n} \subset \varphi^{-1}(V^n_{\alpha_n}), V^n_{\alpha_n} \in \mathbf{B}_n$ 满足 $\overline{V^{n+1}_{\alpha_{n+1}}} \subset V^n_{\alpha_n}$, 故

$$\varphi(x) \cap V^{n}_{\alpha_n} \neq \varnothing.$$

又

$$\varphi(x) \cap (\bigcap_{n\in N} V^{n}_{\alpha}) = \varphi(x) \cap (\bigcap_{n\in N} \overline{V^{n}_{\alpha}}) \neq \varnothing,$$

取 $y \in \varphi(x) \cap (\bigcap_{n\in N} \overline{V^{n}_{\alpha_n}})$, 则 $y \in V^{n}_{\alpha_n}$, 故 $\{V^{n}_{\alpha_n}\}$ 构成 y 的邻域基, y 被 x 所唯一确定, 作 $f: X \to Y$ 满足 $f(x) = y$, 则 f 是 φ 的一个选择, 下证 f 的连续性

$\forall x_0 \in X$, $f(x_0) = y_0$, 设 G 是 y_0 的一个邻域, 由 $\mathbf{U}_n$ 的性质知存在 $U^{n}_{\alpha_n} \in \mathbf{U}_n$, $x_0 \in U^{n}_{\alpha_n}$, 由 y_0 的构造知 $\{V^{n}_{\alpha_n}\}$ 构成 y_0 的一个邻域基, 故存在 N, 使 $y_0 \in V^{N}_{\alpha_N} \subset G$, 当 $x \in U^{N}_{\alpha_N}$ 时,

$$f(x) \in V^{N}_{\alpha_N} \subset G,$$

故 f 在 x_0 处连续, f 是 φ 的一个连续选择

如果将上述定理中的 $C(Y)$ 换成 $F(Y)$, 则需要 Y 具有整体的完备性, Wick[5] 对具有单调完备可数序基的空间给出了相应于定理 1.3 的刻画, 以完全类似于定理 2.1 的构造方式可得到

定理 2.2 设 X 是零维仿紧空间, Y 为具有单调完备可数序基的空间, $\varphi: X \to F(Y)$ 是 l.s.c 的, 则 φ 存在连续选择

设想对定理 1.2 作相应的改进, 但直接构造较为复杂, 借助于仿紧空间和零维仿紧空间的映射关系可以完成这种转换

定理 2.3 设 X 为仿紧空间, Y 为具有可数序基的空间, $\Phi: X \to C(Y)$ 是 l.s.c 的, 则存在一个 u.s.c 集值映射 $\Psi: X \to C(Y)$ 使对 $\forall x \in X$, $\Psi(x) \subset \Phi(x)$.

证明　设 $\Phi: X \to C(Y)$ 是 l.s.c 的, 由 Choban[8] 的结论知, 存在零维仿紧空间 Z, 及 Z 的子空间 S 和完全映射 $f: Z \to X$ 使 $f(S) = X$ 且 $f|S$ 是开紧的

作 $\hat{\Phi}: Z \to C(Y)$ 使 $\hat{\Phi} = \Phi(f(z))$, 则 $\hat{\Phi}$ 是 l.s.c 的, 因而存在连续选择 $g: Z \to Y$, 定义映射 $\Psi: X \to C(Y)$ 使 $\Psi(x) = g(f^{-1}(x))$, 则由于 f 是闭映射, 故 f^{-1} 是 u.s.c 的, 因而 Ψ 是 u.s.c 的, 至于 $\Psi(x) \subset \Phi(x)$ 是显然的

定理 2.4 设 X 是仿紧空间, Y 为具有单调完备可数序基的空间, $\Phi: X \to F(Y)$ 是 l.s.c 的, 则存在 u.s.c 的 $\Psi: X \to C(Y)$ 和 l.s.c 的 $\varphi: X \to C(Y)$ 使对任意 $x \in X$ 有

$$\varphi(x) \subset \Psi(x) \subset \Phi(x).$$

证明　取 Z, S 和 f 为定理 2.3 中的空间和映射, 作 $\hat{\Phi}: Z \to F(Y)$ 使 $\hat{\Phi} = \Phi(f(z))$, 则 $\hat{\Phi}$ 是 l.s.c 的, 由定理 2.2 知存在连续选择 $g: Z \to Y$. 作

$$\varphi = g((f|S)^{-1}(x)), \Psi = g(f^{-1}(x)),$$

则易验证 Ψ, φ 满足所需性质

注　定理 2.2 和定理 2.4 分别改进了定理 1.1 和定理 1.2

作者对方嘉琳教授的指导表示衷心的感谢, 同时也感谢朱建平同志所提供的宝贵意见

参 考 文 献

[1] E. Michael, *Continuous selection* Ⅱ, Ann. Math., 64(1956), 562- 586.

[2] E. Michael, *A theorem on semi continuous set-valued functions*, Duke Math. J., 26(1959), 647-651.

[3] Arhangskill *Mappings and spaces*, Russian Math Surveys, 21(1966), 115- 162.

[4] J. Worrel, H. Wicke, Cand J. Math., 17(1965), 820- 830.

[5] H. Wicke, Notices of the Amer. Math. Soc., 13(1966), 255.

[6] **儿玉之宏著, 方嘉琳译, 拓扑空间论, 科学出版社**, 1984.

[7] **燕鹏飞, 亚紧性和选择理论, 安徽大学学报**, 1(1992), 9- 13.

[8] M. Choban, E. Michael, Top. Appl., 49(1993), 217- 220.

The Improvement of Two Results in Selection Theory

Yan Pengfei

(Dept. of Math., Anhui Univ., Hefei 230039)

Abstract

In this paper, we prove the selection theorems of set-valued mappings with valus in the space having bases of countable order, two famous results are improved.

Keywords continuous selection, bases of countable order.