第18卷第1期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 1
1998年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1998

关于余直径的一个充分条件*

贾振声　　戴维纪
(太原工业大学数力系, 030024)

摘　要　本文给出了一个关于长圈和长路的新的充分条件. 主要结果是: 设在3-连通图 G 中, 任一对距离为2的顶点 u, v, 都满足 $\max\{d(u), d(v)\} \geq \frac{m}{2}$, 那么 $d^*(G) \geq \min\{n-1, m-2\}$.

关键词　图, 圈, 路, 余直径
分类号　AMS(1991) 05C38/CCL O157.5

定义　设 G 为连通图, 对 G 中任两点 x, y, 定义它们的余距离 $d^*(x,y) = \max\{|P|-1 \mid P$ 为 (x,y) 路$\}$, 而 G 的余直径 $d^*(G) = \min\{d^*(x,y) \mid (x,y) \subset V(G)\}$.

引理1　设 $Q = (x_1, x_2, \cdots, x_t)$ 为2-连通图 G 中的一条路, 且 $N(x_1) \subset V(Q), N(x_t) \subset V(Q)$; 而 x_a, x_b 为 Q 上的任两点; 则 G 中存在一条路 $R(x_a, x_b)$, 满足 $|R| \geq \min\{d(x_1)+1, d(x_t)+1\}$.

引理2　在定理2的条件下, 对任意的 $e \in E(G)$, G 中存在一条包含边 e 的最长路 $P = (u, \cdots, v)$, 且 $d(u) \geq \frac{m}{2}, d(v) \geq \frac{m}{2}$.

定理1　设3-连通图 G 中, 任一对距离为2的顶点 u, v 都满足 $\max\{d(u), d(v)\} \geq \frac{m}{2}$, 那么通过 G 的任一边都有一个圈, 其长度至少为 $\min\{n, m-1\}$.

证明　反证法. 假设定理不真. 设对于 $e \in E$, G 中不存在包含 e 且长度至少为 $\min\{n, m-1\}$ 的圈.

由引理2知, G 中存在包含边 e 的最长路 $P = (x_1, \cdots, x_t)$ 且满足

$$d(x_1) \geq \frac{m}{2};\ d(x_t) \geq \frac{m}{2}. \tag{*}$$

设 $p = \max\{i \mid x_i \in N(x_1)\}$, $q = \min\{i \mid x_i \in N(x_t)\}$. 在满足(*)的道路中, 选择一条使 $q-p$ 为最小, 不妨仍记作 $P = (x_1, \cdots, x_t)$, 其中 $e = x_{s-1}x_s$.

情形1　$p \leq q$. 只需就 $p+1 \leq s \leq q$ 和 $2 \leq s \leq p$ 两种情形加以证明, 而 $q+1 \leq s \leq t$ 的情况类似可证.

当 $2 \leq s \leq p$ 时, 令 $i_0 = \max\{i \mid x_i \in N(x_1), i < s-1\}$. 算法:

第0步: 置 $S = \{x_1, \cdots, x_{i_0-1}\} \cup \{x_s, \cdots, x_{p-1}\}$, $2 \leq s \leq p$,

$R = \{x_{p+1}, \cdots, x_t\}$, $2 \leq s \leq p$, $W = \{x_0, \cdots, x_{s-1}\}$, $2 \leq s \leq p$,

* 1994年8月3日收到. 1997年5月12日收到修改稿.

$r \to 0,\ l_0 \to p,\ 2 \le s \le p$;

第1步: $r+1 \to r$, 求从 S 到 R 的道路 $P_r(x_{f_r}, x_{l_r})$, 使得 x_{f_r}, x_{l_r} 是它与 P 仅有的公共点且使得 l_r 最大;

第2步: (i) 若 $l_r \le l_{r-1}$, 则停止且令 $c = l_{r-1}$.

(ii) 若 $l_r > q$, 则停止

(iii) 若 $l_r \le q$, 则置 $\{x_{l_{r-1}}, \cdots, x_{l_r-1}\} \to S$; $R - S - \{x_{l_r}\} \to R$, 返回第1步.

若算法终止于第2步的(ii), 令

$$f_1' = \min\{i \mid x_i \in N(x_1),\ i > f_1\},\quad l_r' = \max\{i \mid x_i \in N(x_t),\ i < l_r\},$$

$$C_0 = P(x_1, x_{f_1'})x_1,\ C_{r+1} = P(x_{l_r'}, x_t)x_{l_r'},\ C_i = P(x_{f_i}, x_{l_i})P_i x_{f_i},\quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

则 $C = \sum_{i=0}^{r+1} C_i$ (这里 $\sum$ 表示对称差).

显然, 圈 C 包含边 e 和 x_1, x_t 及它们的所有邻点, 且 $N(x_1) \cap N(x_t) \subset \{x_p\}$, 故 $|C| \ge d(x_1) + d(x_t) + 1$, 矛盾. 所以算法终止于第 2 步的(i).

由于 $G' = G - \{x_c\}$ 为 2-连通图, 故 G' 中存在两条点不相交的 $\{x_1, \cdots, x_{c-1}\} - \{x_{c+1}, \cdots, x_t\}$ 路 $\mu_1(x_{i_1}, x_{j_1}), \mu_2(x_{i_2}, x_{j_2}))$, 设 $j_1 < j_2$, 选择 μ_1, μ_2 使得(i) j_2 最大, (ii) 在(i) 的前提下, 使 j_1 最小.

设 $i_1 < i_2$, 显然 $i_0 \le i_1 < i_2 \le s - 1$; 由引理 1 及 μ_1, μ_2 的选择知: 必存在一条道路 $R_2(x_{j_1}, x_{j_2})$ 满足: $R_1 \cap R_2 = \varnothing$; $R_2 \cap (\mu_1, \mu_2) = (x_{j_1}, x_{j_2})$; $|R_2| \ge \frac{m}{2}$, 则圈 $C = R_1 + R_2 + \mu_1 + \mu_2$ 包含边 e 且其长度至少为 $\min\{n, m-1\}$.

当 $p + 1 \le s \le q$ 时, 类似可证 G 中存在包含边 e 且长度至少为 $\min\{n, m-1\}$ 的圈, 矛盾.

情形 2 $p > q$, 证明略.

定理 2 设 3-连通图 G 中, 任一对距离为 2 的顶点 u, v 都满足 $\max\{d(u), d(v)\} \ge \frac{m}{2}$, 那么 $d^*(G) \ge \min\{n-1, m-2\}$.

证明 假定 x, y 是 G 中任两顶点, 令 $G' = G + xy$, 那么 G' 必定满足定理 1 的条件, xy 被包含在一个长度至少是 $\min\{n, m-1\}$ 的圈里, 这意味着顶点 x 和 y 被一条长度至少是 $\min\{n-1, m-2\}$ 的道路相联结.

参 考 文 献

[1] H. Enomoto, *Long paths and large cycles in finite graphs*, J. Graph Theory, 8(1984), 287-301.

[2] H. A. Jung, *Longest paths joining given vertices in a graph*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 56(1986), 127-137.

A Sufficient Condition for the Codiameter

Jia Zhensheng　Dai Weiji

(Dept. of Math., Taiyuan Univ of Tech., 030024)

Abstract

In this paper a new sufficient condition for long cycle and long path was given. It inporoved the results of Hikoe Enomoto and H. A. Jung and soon.

Keywords graph, cycle, puth, codiameter