第18卷第2期　　　　数学研究与评论　　　　Vol.18 No.2
1998年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

关于Fibonacci数的两个表达式*

胡久稳
(南开大学数学研究所, 天津300071)

关键词　Fibonacci数, 表达式
分类号　AMS(1991) 05A/CCL O157.1

$\{u_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 表示Fibonacci数列:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1, \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots). \end{cases} \tag{1}$$

问, 其倒数$\frac{1}{u_k}$, $\frac{1}{u_{k+1}}$, $\frac{1}{u_{k+2}}$之间会有什么关系? 通过解两个特定的Diophantine方程来解决这一问题

另一问题是Fibonacci数之间的可除性问题, 构造性的给出了一个显示表达式

定理1　u_k 表示第 k 个Fibonacci数, 则

$$\frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{k+1}} + \frac{1}{u_{k+2}} + (-1)^k \frac{1}{u_k u_{k+1} u_{k+2}}. \tag{2}$$

引理1　n 为一正整数, r 是 n^2+1 的一个因子, 则Diophantine方程$\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{nxy}$的解是 $x = n + r$, $y = n + (n^2+1)/r$.

引理2　n 为一正整数, r 是 n^2-1 的一个因子, 则Diophantine方程$\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{nxy}$的解是 $x = n + r$, $y = n + (n^2-1)/r$.

定理2　若 $k = dr$ $(k, d, r$ 均为正整数, 且 d, r 不为1), 则

$$\frac{u_k}{u_d} = \sum_{i=0}^{r-1} C_r^i u_d^{r-i-1} u_{d-1}^i u_{r-i}, \tag{3}$$

这里 C_r^i 是组合数

* 1995年6月13日收到