第 18 卷第 2 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

关于广义函数赋值问题的完善与积分问题*

董加礼　石砚刚　　傅德友
(吉林工业大学, 长春 130025)　(空军第二航空学院, 长春 130022)

摘　要　本文采用非标准分析方法, 首先对广义函数的赋值问题进行了完善; 接着界定了广义函数的积分; 最后讨论了广义函数的广义连续性.

关键词　广义函数, 调和表示, 集值, 广义函数积分, 广义连续性.
分类号　AMS(1991) 30G, 03H05/CCL O174.55

1　引　言

尽管由于 Schwartz 广义函数的问世, 结束了数学家和物理学家关于 δ-函数的理论之争, 但代价是: 广义函数是作为基本函数空间上的连续线性泛函出现的, 它在普通空间上已没有意义. 然而实际工作者仍象普遍函数那样使用广义函数, 因此理论和应用上的矛盾并没有真正的沟通.

例如, 原苏联乌克兰科学院院士 Г. Е. Пухов为了求解线性定常系统, 时变系统和非线性系统而引进台劳变换[1, 2]. 但他的变换不能解决带有阶跃响应和脉冲响应的上述系统. 后来有人试图用广义函数重新定义台劳变换, 但因涉及到如何理解广义函数在一点的值及其导数问题而没有成功.

又比如, 假设有一个脉冲电路的电流为 $H(t)$, 电流的变化速度为 $h(t)$, 则优化问题

$$\min_{t\in R} T(t) = (H(t) - h(t))^T$$

就是求一时刻, 使电流最小且速度最大. 由于 $H(t)$ 和 $h(t)$ 实际上都是广义函数, 因此这是一个广义函数的优化问题, 在经典的广义函数理论下是无法解决的.

因此, 如何对广义函数进行逐点赋值, 不仅是理论问题, 更是实际问题的需要. 事实上, 从广义函数诞生不久, 便有人试图赋值, 使其也具有普通函数的"特性". 例如, 从 1957 年到 1960 年间, 波兰的 Z. Zielény 和 S. Łojasiewicz 等就做了很多这方面的工作[3, 4, 5, 6]. 也许由于当时的数学工具还不够, 赋值工作进行得很艰难, 终因没有抓住问题的本质而无法再进行下去, 这样也就没有引起人们的注意.

时隔 30 年, 到 80 年代后期, 李邦河等利用广义函数的调和表示, 采用非标准分析方法, 成功地建立了一维广义函数的集值导数理论[7]. 之后, 董加礼等将李帮河的工作推广到 n 维情况[8]. 这些工作不仅从另一侧面揭示了广义函数的本质, 而且丰富了非光滑分析理论, 为应用

* 1995 年 4 月 25 日收到. 国家自然科学基金资助项目.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

提供了更为直接的基础

本文采用非标准分析方法, 首先论证了广义函数赋值问题的合理性, 使这一问题更加完善; 接着界定了广义函数的积分, 从而恰当地解释了 δ-函数的直观定义和物理意义; 最后讨论了广义函数的所谓广义连续性, 说明广义函数是一种特殊的集值映射. 这一工作为进一步讨论广义函数的优化问题奠定了基础.

本文将使用下述符号: R 表示实数集合, R_+ 表示正实数集合, $\overline{R}=R\cup\{\pm\infty\}$, $\mathrm{cl}_{\overline{R}}$ 与 $(\overline{R})\lim$ 分别表示 $\overline{R}$ 中的闭包与极限运算. $\mathrm{co}A$ 表示集合 A 的凸包. $\mathbf{D}=\mathbf{D}(R)$ 表示 R 上具有紧支集的实 $C^\infty(R)$ 之线性空间, 并赋予 Schwartz 拓扑, $\mathbf{D}'=\mathbf{D}'(R)$ 表示 $\mathbf{D}$ 上的连续线性泛函之空间, 即一维广义函数空间, $\mathrm{HR}(T)$ 表示 $T\in\mathbf{D}$ 在 $H_{1+1}=R\times R_+$ 上的调和表示的全体. ${}^*R$ 表示 R 的非标准扩张, 即超实数域, ${}^*A$ 表示标准集合 A 的非标准扩张, $x\in{}^*R$ 或 ${}^*\overline{R}$ 的标准部分分别记为 ${}^0x$ 及 $\mathrm{st}x$, 对于 $x\in{}^*R$, 称集合

$$\mu(x)=\{y\in{}^*R\mid y-x\ \text{为无穷小}\}=\{y\in{}^*R\mid y\simeq x\}$$

为 x 在 ${}^*R$ 中的单子, 并记 $\mu_+(x)=\{y\in\mu(x)\mid y>x\}$.

2 广义函数的逐点赋值问题

文[7]给出了下述定义: 设 $T\in\mathbf{D}'$, $x_0\in R$, $u\in\mathrm{HR}(T)$, 则定义

$$T(x_0)=\partial^{(0)}T(x_0)=\{{}^0[{}^*u(x,y)]\mid x\in\mu(x_0),\ y\in\mu_+(0)\}$$

为广义函数 T 在 x_0 点的集值. 并证明了此定义等价于下面的标准定义:

$$T(x_0)=\{(\overline{R})\lim_{k\to 0}u(x_k,y_k)\mid (x_k,y_k)\in C(x_0),\ \{u(x_k,y_k)\}\ \text{在}\ \overline{R}\ \text{中收敛}\},\tag{1}$$

其中

$$C(x_0)=\{(x_k,y_k)\in H_{1+1}\mid (x_k,y_k)\to(x_0,0)\}.$$

下面从两个方面说明这个定义的合理性.

定理 1 设 T_f 为正则广义函数, T_f 所对应的局部可积函数为 $f(x)\in L^p(1\le p<+\infty)$. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则有 $T_f(x_0)=\{f(x_0)\}$, 即 $T_f(x_0)$ 为单点集.

证明 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 所以必有 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续. 令

$$F(x)=\int_0 f(t)\,dt,\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

显然 $F(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续可微, 且

$$F'(x)=f(x),\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

任取 $u\in\mathrm{HR}(T_F)$, $v\in\mathrm{HR}(T_f)$, 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}\in\mathrm{HR}(T_{F'})$, 而 $F'=f$, 所以 $T_{F'}$ 与 T_f 是同一正则广义函数, 于是有:

$${}^*\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y)\simeq{}^*v(x,y),$$

即

$${}^0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)\right]={}^0[v(x,y)].$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

于是由[7]中定义 2.1 及本文上述记号 $T(x_0)$ 知

$$\partial T_F(x_0) = \{{}^0[{}^*\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)] \mid x \in \mu(x_0), y \in \mu_+(0)\}$$

$$= \{{}^0[{}^*v(x,y)] \mid x \in \mu(x_0), y \in \mu_+(0)\} = T_f(x_0).$$

另一方面, 由文[7]定理 3.2(这个定理中的 $\partial F(x_0)$ 实际上是 $\partial T_F(x_0)$ 的一种简记), 可知

$$\partial T_F(x_0) = \partial F(x_0) = \bigcap_{\epsilon \in R_+} \mathrm{cl}_{\overline{R}}\{\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \mid x, y \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon), x \neq y\}$$

$$= \bigcap_{0<\epsilon<\delta} \mathrm{cl}_{\overline{R}}\{F'(\xi) \mid \xi \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)\} = \{F'(x_0)\} = \{f(x_0)\},$$

故有

$$T_f(x_0) = \{f(x_0)\}.$$

此定理说明, 当广义函数退化到普通函数时, 在连续点其集值与普通函数值是相等的. 再由 Лузин定理即知, 除去一个测度可以任意小的集合外, 集值与普通函数值是一致的. 因此, 这种赋值确是普通函数的推广.

例 1 求广义函数 $\delta(x)$ 的值

事实上, $p(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ 为 $\delta(x)$ 的调和表示[9], 所以对任意 $x \in R$, 由(1)式不难算出

$$\delta(x) = \{(\overline{R})\lim_{k\to\infty}\frac{y_k}{\pi(x_k^2+y_k^2)} \mid x_k \to x, y_k \to 0, \frac{y_k}{\pi(x_k^2+y_k^2)} \text{在 } \overline{R} \text{ 中收敛}\}$$

$$= \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ [0, +\infty], & x = 0. \end{cases}$$

这个结果与实际情况完全符合. 如果将 $\delta(x)$ 理解为一个脉冲, 则因电路不能突变, 于是由过渡过程知, 当 $x \neq 0$ 时, 电路中的脉冲值自然为零; 而当 $x = 0$ 时, 脉冲可以取得 $[0, +\infty]$ 中的一切值.

类似地, 可以求出常见的其它广义函数的值. 这说明上述赋值不仅可操作, 而且还可以恰当解释所代表的物理意义.

3 广义函数的积分

定义 1 设 $T \in \mathbf{D}'$, $u \in \mathrm{HR}(T)$, $[a,b] \subset (-\infty, +\infty)$, 则称 T 在 $[a,b]$ 上的积分(记作 $\oint_a^b T(x)dx$) 为集合

$$\oint_a^b T(x)dx = \{{}^0[{}^*(\int_{x_1}^{x_2} u(t,y)dt)] \mid x_1 \in \mu(a), x_2 \in \mu(b), y \in \mu_+(0)\}.$$

不难证明, 与此定义等价的标准形式为

$$\oint_a^b T(x)dx = \{(\overline{R})\lim_{n\to\infty}\int_{z_n}^{y_n} u(t,y_n)dt \mid x_n \to a, z_n \to b, y_n \to 0^+$$

$$\text{且 } \int_{z_n}^{y_n} u(t,y_n)dt \text{ 在 } \overline{R} \text{ 中收敛}\}.$$

定理 2 设 T_f 为正则广义函数, T_f 所对应的局部可积函数为 $f(x) \in L^p_{[a,b]}(1 \leq p < +\infty)$, 则对任意区间 $[a,b]$, 有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\oint T_f(x)\,dx = \{\int f(x)\,dx\}.$$

证明 对正则广义函数 T_f, f 的泊松积分

$$u(x,y) = \int f(x)p_y(x-t)\,dt,\ p_y(x) = \frac{c_1 y}{x^2+y^2},\ c_1 = \frac{1}{\pi}$$

就是 T_f 的调和表示, 且几乎对所有的 $x \in R$, 有

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = f(x),$$

于是由Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\oint f(x)\,dx = \lim_{y\to 0^+}\int u(x,y)\,dx.$$

令 $F(x_1,x_2,y) = \int_1^2 u(ty)\,dt$, 则由超实积分中值定理[10]易知, $F(x_1,x_2,y)$ 关于 (x_1,x_2) 是连续的, 于是

$$\begin{aligned}\oint T_f(x)\,dx &= \{{}^0[{}^*\int_1^2 u(t,y)\,dy]\,|x_1\in\mu(a), x_2\in\mu(b), y\in\mu_+(0)\}\\ &= \{{}^0[{}^*F(x_1,x_2,y)]\,|x_1\in\mu(a), x_2\in\mu(b), y\in\mu_+(0)\}\\ &= \{{}^0[{}^*F(a,b,y)]\,|y\in\mu_+(0)\} = \{\lim_{y\to 0^+}\int u(t,y)\,dt\}\\ &= \{\int f(x)\,dx\}.\end{aligned}$$

此定理说明, 对正则广义函数来说, 其积分与 L - 积分相同, 因此广义函数的积分是 L - 积分的推广.

例 2 求广义函数 $\delta(x)$ 在任意区间 $[a,b]$ 上的积分.

由 $p(x,y) = \dfrac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ 为 $\delta(x)$ 的调和表示, 故

$$\begin{aligned}\oint \delta(x)\,dx &= \{{}^0[{}^*\int_1^2 \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}dx]\,|x_1\in\mu(a), x_2\in\mu(b), y\in\mu_+(0)\}\\ &= \{{}^0[{}^*(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y})\,|_{x_1}^{x_2}]\,|x_1\in\mu(a), x_2\in\mu(b), y\in\mu_+(0)\}\\ &= \{{}^0[{}^*(1)]\} = \{1\}\end{aligned}$$

特别地有

$$\int_{\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = \{1\}.$$

比例恰当地解释了 δ 函数的直观定义 再结合例 1 便圆满地解释了 δ 函数的物理意义, 即质量全部集中在原点上, 其在 R 上的积分值为 1.

4 广义连续性

定义 2 设 $T: X \to R$ 为一般集值映射, $x_0 \in X \subset R$, 称 $T(x)$ 在点 x_0 是广义连续的, 若满足条件:

(i) 对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $y \in T(x)$, $y_0 \in T(x_0)$, 使

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$|y - y_0| < \epsilon$;

(ii) 若 $y_1, y_2 \in T(x_0)$, 则 $[y_1, y_2] \subset T(x_0)$.

直观上, 就是这种广义连续的映射的"图象"没有"洞". 例如, 映射

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \\ [0, 1], & x = 0 \end{cases}$$

就是广义连续的. 对普通的连续函数(单值映射) 来说, 显然是广义连续的.

定理 3 设 $T \in \mathbf{D}'$, 则广义函数 T 作为集值映射在 R 上是广义连续的.

证明 假设 $T(x)$ 在 $x_0 \in R$ 处不是广义连续的. 则必不满足定义中的条件(i) 或(ii).

若条件(i) 不成立, 则存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意 $\delta > 0$ 都存在 $x_\delta \in R$, $|x_\delta - x_0| < \delta$, 但对任意 $y \in T(x)$ 及 $y_0 \in T(x_0)$, 都有 $|y - y_0| \geq \epsilon_0$.

仿照文[7] 命题 4.2 不难证明, T 作为集值映射是上半连续的取闭区间值的集值映射, 故可设

$$T(x_0) = [a_0, b_0], T(x) = [a, b]$$

于是, 由上面的反证法假设可知 $[a_0, b_0] \cap [a, b] = \varnothing$, 这显然与 $T(x)$ 的上半连续性相矛盾.

若条件(ii) 不成立, 即存在 $y_1, y_2 \in T(x_0)$, 使 $[y_1, y_2] \not\subset T(x_0)$. 这显然与 $T(x)$ 为取闭区间值的集值映射相矛盾. □

此定理说明广义函数是一种特殊的集值映射, 即广义连续的集值映射.

5 一点说明

今知, 广义函数运算的基本思想是利用了所谓"对偶性", 即将微分运算转移到基本函数空间上去. 前面讨论的广义函数赋值和广义积分概念保留并继承了这个思想, 将广义函数的微分与积分等运算转移到调和函数上去, 这是问题的本质所在.

参 考 文 献

[1] Г. Е. Пухов. Преобраванця Теплоты и их Примение в Электромехнике и Электронике. Киев《Неукоюяуика》, 1978.

[2] Г. Е. Пухов. Дифференциальные Преобразования Уравнений Электрических Чеиед. 《Электричество》, 1980. 4.

[3] Z. Zielémy, Sur la définition de Lojasiewicz de la valeur d'une distribution dans un point, Bull. Acad. Pol. Sc. Cl. Ⅳ, 1955, 519-520.

[4] Z. Zielémy, Über die Mengen der regulären und singulären Punkte einer Distribution. Studia Math., 19: 1(1960), 27-52.

[5] S. Lojasiewicz, Sur la valeur et la limite d'une dans un point, Studie Math., 16(1957), 1-36.

[6] S. Lojasiewicz, Sur la fixation des variables dans une distribution, Studia Math., 17(1958), 1-64.

[7] 李邦河、李雅卿、武康平, 广义函数的集值导数, 中国科学(A), 3(1992), 225-234.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[8] 董加礼, n 维广义函数的集值导数, 系统科学与数学, 17: 3(1997), 213- 220.
[9] 李邦河、李雅卿, 广义函数及其解析和调和表示, 国防工业出版社, 1992.

On the Valuation and Integration of Generalized Functions

Dong Jiali *Shi Yangang*
(Jilin University of Technology, Changchun 130022)

Fu Deyou
(The Second Aeronautical Institute of Air Force, Changchun 130022)

Abstract

We discuss the problem of valuation assignment and integration of generalized functions by nonstandard analysis method. The generalized continuity of generalized functions is also discussed.

Keywords generalized function, harmonic representation, set-value, integration of generalized function, generatized continuity of generalized function.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.