预给二面角的m面凸多胞形嵌入R^d的充分必要条件*

郭 曙 光

(江苏盐城师专, 224002)

摘 要 本文给出了预给二面角的m面凸多胞形嵌入R^d的充分必要条件.

关键词 凸多胞形, 等角嵌入

分类号 AMS(1991) 51K/CCL O184

文献[1]中给出了预给二面角的单形嵌入E^n的充分必要条件, 解决了一个完全新的类型的嵌入问题. 本文将文献[1]的主要结果推广到d维欧氏空间R^d中的m面凸多胞形, 给出了预给二面角的m面凸多胞形嵌入R^d的充分必要条件.

定理 给了$\binom{m}{2}$ $(m>d)$个实数$0\le\theta_{ij}<\pi(1\le i<j\le m)$, 并令$(i\ne j)\ \theta_{ji}=\theta_{ij}$, 则当且仅当下列条件

(i) m阶对称矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & & & -\cos\theta_{ij}\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{ij} & & & 1\end{pmatrix}$是半正定的;

(ii) A的秩为d;

(iii) A的任一$d-1$阶非零主子式$A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_{d-1}\\ i_1 i_2\cdots i_{d-1}\end{pmatrix}$, 必存在$s; t\ne i_1, i_2, \cdots, i_{d-1}, s\ne t$使得$A$的$d$阶子式

$$A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_{d-1}s\\ i_1 i_2\cdots i_{d-1}t\end{pmatrix}<0$$

同时满足时, 在R^d中存在m面凸多胞形, 它的任意两个侧面F_i, F_j所成之内二面角$F_iF_j=\theta_{ij}$.

文中采用文献[2]中的记号和术语, R^d表示d维欧氏空间, $\langle, \rangle$记其中的内积, 用小写字母p, q等表示R^d中的点, 并约定p, q也表示始点在原点终点为p, q的向量, $S_{d-1,1}$记R^d中球心在原点的单位球面, $H(q, \alpha)=\{x\in R^d \mid \langle q, x\rangle=\alpha\}$ (α为实数) 记R^d中的超平面, $K(q, \alpha)=\{x\in R^d \mid \langle q, x\rangle\le\alpha\}$表示$R^d$中由超平面$H(q, \alpha)$所确定的闭半空间, $P=\mathrm{conv}\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$记$d$维凸多胞形$P$的最小内表示, 即$P$的顶点集$\mathrm{ver}P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, $P=\bigcap_{i=1}^{m}K(q_i, \alpha_i)$记$P$的不可约外表示, 即$H(q_i, \alpha_i)\cap P$为$P$的侧面, 记为$F_i(i=1, 2, \cdots, m)$, $P^\circ=\{x\in R^d \mid \langle x, p\rangle\le 1, p$

* 1995年4月14日收到

$\in P\}$表示凸多胞形 $P=\mathrm{conv}\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 的极集, θ_{ij} 记侧面 F_i, F_j 所成的内二面角.

引理 1[3] 给了 $\binom{m}{2}$ 个实数 $0<\varphi_{ij}\leq\pi(1\leq i<j\leq m)$, 则在球面型空间 $S_{d-1,1}$ 中存在 m 个点 $p_1, p_2, \cdots, p_m$, 而 $S_{d-2,1}$ 中不存在这样的点使得 $\overleftarrow{p_ip_j}=\varphi_{ij}$ ($\overleftarrow{p_ip_j}$ 表示 p_i 到 p_j 的球面距离) 对一切 $i\neq j$ 成立的充要条件是

(i) m 阶对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & & & \cos\varphi_{ij} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos\varphi_{ij} & & & 1 \end{pmatrix}$ 是半正定的;

(ii) 矩阵 A 的秩为 d.

在下面的定理证明中, 还将用到文献[1]中的引理 3 和文献[2]中的部分结论, 恕不一一列出.

定理的证明 **必要性** 设 P 为 R^d 中 m 面凸多胞形, P 的 m 个侧面分别为 $F_1, F_2, \cdots, F_m$, F_i 与 F_j 所成的内二面角为 θ_{ij}, 不妨设原点 $O\in \mathrm{int}P$ (P 的内部), F_i 的仿射包 $\mathrm{aff}F_i$ 的方程 $H(p_i, 1)(i=1, 2, \cdots, m)$, 由[2]推论 9.6, $P=\bigcap_{i=1}^{m}K(p_i, 1)$, 并且这种表示是不可约的, 显然 p_i 为 P 的侧面 F_i 的外法向量(指向多胞形外部的法向量), 由[2]中定理 9.1, $P^\circ=\mathrm{conv}\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$, $0\in\mathrm{int}P^\circ$, 设射线 $0p_i$ 交 $S_{d-1,1}$ 于点 $N_i(i=1, 2, \cdots, m)$, N_i, N_j 间的球面距离记为 φ_{ij}, 则 $\varphi_{ij}=\pi-\theta_{ij}$, 又因 $0\in\mathrm{int}P^\circ$, 故 $Q=\mathrm{conv}\{N_1, N_2, \cdots, N_m\}$ 为 d 维凸多胞形, 且 $0\in\mathrm{int}Q$, 由引理 1, 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{ij} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{ij} & & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & \cos\varphi_{ij} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos\varphi_{ij} & & & 1 \end{pmatrix}$$

是半正定的, 且秩为 d, 即(i), (ii) 成立.

对于 A 的任一 $d-1$ 阶非零主子式 $A\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_{d-1} \\ i_1i_2\cdots i_{d-1}\end{pmatrix}$, 因 $S_{d-1,1}$ 中点 $N_{i_1}, N_{i_2}, \cdots, N_{i_d}$ 的 Cayley-Menger 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \cos\varphi_{i_ki_l} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos\varphi_{i_ki_l} & & & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{i_ki_l} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{i_ki_l} & & & 1 \end{vmatrix}=A\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_d \\ i_1i_2\cdots i_d\end{pmatrix}\neq 0,$$

故 $N_{i_1}, N_{i_2}, \cdots, N_{i_{d-1}}$ 线性无关, 从而这 $d-1$ 个点决定的一个径面所分隔的两个半球面中的任一半球面都不可能包含 Q 的全部顶点, 否则与 $0\in\mathrm{int}Q$ 相矛盾, 故 $\mathrm{ver}Q$ 中必存在两个点 $N_s\notin\{N_{i_1}, N_{i_2}, \cdots, N_{i_d}\}$, $N_t\notin\{N_{i_1}, N_{i_2}, \cdots, N_{i_d}\}$ 使得 N_s, N_t 分别在上述径面所分隔的两个半球面上, 由[1]中引理 3 知

$$\begin{vmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{i_k i_l} & \cdots & -\cos\theta_{i_1 t} \\ & 1 & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ -\cos\theta_{i_k i_l} & & & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\cos\theta_{i_{d-1} t} \\ -\cos\theta_{s l_1} & \cdots & \cdots & \cdots & -\cos\theta_{s i_{d-1}} & -\cos\theta_{st} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & & & \cos\varphi_{i_k i_l} & \cdots & \cos\varphi_{i_1 t} \\ & 1 & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \cos\varphi_{i_k i_l} & & & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cos\varphi_{i_{d-1} t} \\ \cos\varphi_{s l_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cos\varphi_{s i_{d-1}} & \cos\varphi_{st} \end{vmatrix} < 0,$$

即$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_{d-1} s \\ i_1 i_2 \cdots i_{d-1} t \end{pmatrix} < 0$, **从而**(iii)**成立**

充分性 令 $\varphi_{ij} = \pi - \theta_{ij}$, **则** $0 < \varphi_{ij} \leq \pi (1 \leq i < j \leq m)$. **由**(i), (ii)**知矩阵**

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \cos\varphi_{ij} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos\varphi_{ij} & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{ij} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{ij} & & & 1 \end{pmatrix} = A$$

是秩为 d **的半正定矩阵**, **由引理** 1, $S_{d-1,1}$**上存在**m **个点** $p_1, p_2, \cdots, p_m$ **使得** p_i, p_j **间球面距离** φ_{ij} $(1 \leq i < j \leq m)$, **对于**$\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$**中任一个** $d-1$ **元线性无关子集**$\{p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_{d-1}}\}$, **则有**

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \cos\varphi_{i_k i_l} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos\varphi_{i_k i_l} & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{i_k i_l} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{i_k i_l} & & & 1 \end{vmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_{d-1} \\ i_1 i_2 \cdots i_{d-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

由条件(iii), **存在** $s; t \neq i_1, i_2, \cdots, i_{d-1}, s \neq t$ **使得**

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_{d-1} s \\ i_1 i_2 \cdots i_{d-1} t \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{i_k i_l} & \cdots & -\cos\theta_{i_1 t} \\ & 1 & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ -\cos\theta_{i_k i_l} & & & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\cos\theta_{i_{d-1} t} \\ -\cos\theta_{s l_1} & \cdots & \cdots & \cdots & -\cos\theta_{s i_{d-1}} & -\cos\theta_{st} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & & & \cos\varphi_{i_k i_l}\cdots & \cdots & \cos\varphi_{i_1 t} \\
 & 1 & & & & \vdots \\
 & & \ddots & & & \vdots \\
\cos\varphi_{i_k i_l} & & & 1 & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cos\varphi_{i_{d-1} t} \\
\cos\varphi_{s l_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cos\varphi_{s i_{d-1}} & \cos\varphi_{st}
\end{vmatrix} < 0,
$$

由文[1]**中引理** 3, p_s, p_t **两点被**$\{p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_{d-1}}\}$**所决定的径面分隔在** $S_{d-1,1}$**的两个半球上, 由此可得**, $P = \mathrm{conv}\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$**是** d **维凸多胞形**, $\mathrm{ver}P = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$, **且** $0 \in \mathrm{int}P$, **由**[2]**中定理** 9. 1, $P^\circ = \bigcap_{i=1}^{m} K(p_i, 1)$**是** d **维凸多胞形**, $0 \in \mathrm{int}P^\circ$, **且** P° **的这个表示是不可约的, 从而** $F_i = P^\circ \cap H(p_i, 1)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$**为** P° **的全部侧面, 显然** p_i **为其外法向量**, F_i, F_j **所成之内二面角** $F_iF_j = \pi - \varphi_{ij} = \theta_{ij}$. **故** P° **正是所要求的** d **维** m **面凸多胞形**.

参 考 文 献

[1] **杨路、张景中, 预给二面角的单形嵌入** E^n **的充分必要条件, 数学学报**, 26: 2(1983), 250- 256.

[2] Arne Brφndsted, *An introduction to convex polytopes*, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.

[3] L. M. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry*, 2nd ed., New York, 1970, 162 - 163.

The Necessary and Sufficient Condition for Embedding a Convex Polytope in R^d with Prescribed Dihedral Angles

Guo Shuguang

(Jiangsu Yancheng Teachers' College)

Abstract

This paper presents a necessary and sufficient condition for embedding a convex polytope in R^d with prescribed dihedral angles.

Keywords convex polytope, equiangular embedding.