第18卷第2期　　　　数 学 研 究 与 评 论　　　　Vol. 18 No. 2
1998年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

一般正则泛函的W-极小的正则性*

费　宁
(大连理工大学应用数学系, 116024)

摘　要　本文讨论了一般的正则泛函:

$$F(u;\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)dx$$

的局部W-极小的$C^{1,\alpha}$正则性. 获得了处理W-极小u的Hölder连续的指数估计.

关键词　W-极小, 正则性, 正则泛函
分类号　AMS(1991) 35A07/CCL O175.2

1　预备知识

设Ω是n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$的开区域. $u=(u^1,u^2,\cdots,u^N)$是$\Omega\to\mathbf{R}^N$的可微映射. $Du=\{D_\alpha u^i\}$, $i=1,2,\cdots,N$; $\alpha=1,2,\cdots,n$. $f(x,u,Du)$满足以下条件:

(A_1)　存在常数$\Lambda\geq\lambda>0$, 使得对于任意$(x,u,p)\in\Omega\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^{nN}$, 有

$$\lambda|p|^2-a\leq f(x,u,p)\leq\Lambda|p|^2+a,\ \forall p\in\mathbf{R}^{nN},\ \text{常数}\ a>0.$$

(A_2)　$\forall(x,u)\in\Omega\times\mathbf{R}^N$, $f(x,u,p)$关于p是二次连续可微函数, 其导函数有界. 对于$\xi=\{\xi_\alpha^i\}\in\mathbf{R}^N$, $\gamma|\xi|^2\leq f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x,u,p)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j$; $|f_{pp}(x,u,p)|\leq L$, 其中γ,L是正常数.

(A_3)　对于$p\in\mathbf{R}^{nN}$, 函数$\dfrac{f(x,u,p)}{1+|p|^2}$在$\Omega\times\mathbf{R}^N$上关于$p$是一致连续的, 即: 存在一个连续的有界单调增加的下凸函数$h(t)$, 使得:

$$|f(x,u,p)-f(y,v,p)|\leq(1+|p|^2)h(|x-y|^2+|u-v|^2)$$

对于(x,u)和$(y,v)\in\Omega\times\mathbf{R}^N$成立. $h(0)=0$.

定义1.1　设$u\in H^1(\Omega,\mathbf{R}^N)$, 若$\forall\varphi\in H_0^1(\Omega,\mathbf{R}^N)$, 有$F(u;\Omega)\leq(1+W(R))F(u+\varphi;\Omega)$, 称$u$是$F$的$W$-极小.

定义1.2　称$F(u;\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)dx$是一般正则泛函, 是指$f(x,u,p)$在$\Omega\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^{nN}$上, 关于$x$可测, 对几乎所有的$x\in\Omega$, $f(x,u,p)$关于(u,p)连续.

定义1.3　称一般正则泛函$F(u;\Omega)$是局部W-极小正则的, 是指存在某个开集$\Omega_0\subset\Omega$, $F(u;\Omega_0)$是W-极小正则的, 而且测度$(\Omega-\Omega_0)=0$.

在文献[2], [4], [5]中已经有的部分结论:

* 1995年12月4日收到

定理 1.1 设 $u \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^N)$ 是方程组 $\int_\Omega A_i^\alpha(Du) \cdot D_\alpha \varphi dx = 0,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbf{R}^N)$ 的解，其中 $A_i^\alpha(Du)$ 满足

$$|A_i^\alpha(p)| \leq M|p| \text{ 和 } \lambda|\xi|^2 \leq A_{p_\beta^j}^\alpha \cdot (p)\xi_\alpha^k \xi_\beta^j \leq \Lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbf{R}^{nN},$$

则 $u \in H_0^{2,2}(\Omega, \mathbf{R}^N)$. 并且 $U = (U_k^i) = (D_k u^i), k = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, N$ 是方程组

$$\int_\Omega \delta_{kl} \cdot A_{ip_\beta^j}^\alpha(U) \cdot D_\beta U_k^j \cdot D_\alpha \varphi_l^i dx = 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbf{R}^{nN}),$$

的解，其中 $\lambda|\xi|^2 \leq \delta_{kl} \cdot A_{ip_\beta^j}^\alpha \cdot \xi_\alpha^{il} \xi_\beta^{jk}, \forall \xi \in \mathbf{R}^{nN}$，当 $k = l$ 时，$\delta_{kl} = 1$；当 $k \neq l$ 时，$\delta_{kl} = 0$.

定理 1.2 设 u 是方程组 $\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x, u) \cdot D_\alpha u^i \cdot D_\beta \varphi^j dx = 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbf{R}^N)$ 的解，$A_{ij}^{\alpha\beta}(x, u) \in C(\Omega \times \mathbf{R}^N)$ 满足 $\lambda|\xi|^2 \leq A_{ij}^{\alpha\beta}(x, u)\xi_\alpha^i \xi_\beta^j \leq \Lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbf{R}^{nN}$，若对每个常数 $M_0 > 0$，存在仅依赖于 $M_0, n, N, \lambda, \Lambda$ 以及 $A_{ij}^{\alpha\beta}$ 的 ϵ_0, R_0，对于某个 $x_0 \in \Omega, R < \min(R_0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega))$，如果 $\int_{B_R(x_0)} |u|^2 dx \leq M_0^2$ 和 $\int_{B_R(x_0)} |u - u_{x_0,R}|^2 dx \leq \epsilon_0^2$ 成立，则有 $\forall \alpha \in (0, 1)$，$u$ 在 x_0 的某个邻域内是 Hölder 连续的，对于 $0 < \rho \leq R \leq R_1$，有

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^2 dx \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\alpha} \int_{B_R(x_0)} |u - u_{x_0,R}|^2 dx,$$

其中 $u_{x_0,R} = \int_{B_R(x_0)} u dx$ 表示 u 在 $B_R(x_0)$ 上的平均值

定理 1.3 记 $F_0(v, B_R) = \int_{B_R(x_0)} f(x_0, u_{x_0,R}, Dv) dx$ 在容许函数类 $J = \{v \in H^1(B_R, \mathbf{R}^N) | v = u \text{ 在 } \partial B_R \text{ 上成立}\}$ 中有 W-极小 v. 记 $w = u - v$ 则

$$\int_{B_R(x_0)} |Dw|^2 dx \leq \frac{2}{\gamma}[F_0(u; B_R) - F_0(v; B_R)], \text{常数 } \gamma > 0.$$

定理 1.4 设 $u \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^N)$ 是正则泛函

$$F(u; \Omega) = \int_\Omega f(x, u, Du) dx, (x, u, Du) \in \Omega \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^{nN}$$

的局部 W-极小，在 A_1 条件下，存在常数 $\gamma_0 > 2$，当 $r \in [2, \gamma_0], u \in H_0^{1,r}(\Omega, \mathbf{R}^N), B_R \subset\subset \Omega$ 时，有

$$\int_{B_{R/2}(x_0)} (1 + |Du|^2)^{r/2} dx \leq C \int_{B_R} (1 + |Du|^2) dx,$$

常数 C 与 R 无关

2 一般正则泛函的 W-极小的局部正则性

引理 2.1 取 $x_0 \in \Omega, B_R \stackrel{\triangle}{=} B_R(x_0) \subset\subset \Omega$，函数 $v \in H^1(B_R, \mathbf{R}^N)$ 在容许函数类 $J = \{v \in H^1(B_R, \mathbf{R}^N) | v = u \text{ 在 } \partial B_R \text{ 上}\}$ 中的极小化泛函

$$F_0(v; B_R) = \int_{B_R(x_0)} f(x_0, u_{x_0,R}, Dv) dx \tag{2.1}$$

满足条件 A_1, A_2，则下面结论成立：对于常数 M_0，存在 $\epsilon_0(M_0) > 0$，如果

$$\int_{B_R(x_0)}(1+|Du|^2)dx\le M_0^2 \text{ 和 } \int_{B_R(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx\le\varepsilon_0^2, \tag{2.2}$$

那么, 对于 $0<\delta<1$, $0<\rho\le R$ 有

$$\int_{B_\rho(x_0)}|Dv-(Dv)_{x_0,\rho}|^2dx\le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta}\int_{B_R(x_0)}|Dv-(Dv)_{x_0,R}|^2dx, \tag{2.3}$$

并且存在 $R_1<R$, 使得 $Dv\in L^\infty(B_{R_1}(x_0))$.

证明　设 v 满足 Eular 方程

$$\int_{B_R(x_0)}f_{p_\alpha^i}(x_0,u_{x_0,R},Dv)D_\alpha\varphi^i dx=0,\ \forall\varphi\in H_0^1(B_R,\mathbf{R}^N).$$

由定理 1.1, $v\in H^{2,2}(B_R,\mathbf{R}^N)$, 并且

$$\int_{B_R(x_0)}\delta_{kl}f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x_0,u_{x_0,R},Dv)\cdot D_\beta(D_kv^i)\cdot D_\alpha\varphi_l^i dx=0,\ \forall\varphi_i\in H_0^1(B_R,\mathbf{R}^{nN}).$$

由定理 1.2, 对于每个常数 $k_0>0$, 存在 $\eta_0>0$(仅依赖于 L_0,γ,η,N,f_{pp} 的连续模), 如果

$$\int_{B_R(x_0)}|Dv|^2dx\le k_0^2 \text{ 和 } \int_{B_R(x_0)}|Dv-(Dv)_{x_0,R}|^2dx\le\eta_0^2, \tag{2.4}$$

则 Dv 在 x_0 点的某邻域内 Hölder 连续, (2.3) 成立. 另外, 易证条件 (2.2) 蕴含着条件 (2.4).

引理 2.2　设 u 是正则泛函

$$F(u;\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)dx,\quad (x,u,Du)\in\Omega\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^{nN} \tag{2.5}$$

的一个局部 W-极小. f 满足条件 A1, A2, A3. $h(t)\le Ct^\sigma$, $0<\sigma<1$, $W(R)\le CR^{2\mu}$, $0<\mu<1$, 在 (2.2) 条件下, 对于 $0<\tau<\frac{1}{2}$ 有

$$\Phi(x_0,\tau R)\le m\tau^{2\delta}\Phi(x_0,R)+MR^{2\delta_1}\tau^{-n}H^k(x_0,R), \tag{2.6}$$

其中 m, M, k 是常数; $\delta,\delta_1\in(0,1)$,

$$\Phi(x_0,R)=\int_{B_R(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx,$$

$$H(x_0,R)=1+|(Du)_{x_0,R}|+\Phi^{\frac{1}{2}}(x_0,R),$$

$$(Du)_{x_0,R}=\int_{B_R(x_0)}|Du|dx.$$

证明　设 $F_0(v;B_{R/2})=\int_{B_{R/2}(x_0)}f(x_0,u_{x_0,R/2},Dv)dx$ 是 v 在函数类 $J=\{v\in H^1(B_R,\mathbf{R}^N)\mid$ 在 $B_{R/2}$ 外, $u=v\}$ 中的极小泛函. 由引理 2.1, 对 $0<\delta<1$, $0<\rho\le R/2$, 有

$$\int_{B_\rho(x_0)}|Dv-(Dv)_{x_0,\rho}|^2dx\le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta}\int_{B_{R/2}(x_0)}|Dv-(Dv)_{x_0,R/2}|^2dx.$$

取 $R_1<R/2$, 使得 $Dv\in L^\infty(B_{R_1})$, 令 $w=u-v$, 则

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2dx&\le 2\int_{B_\rho(x_0)}|Dv-(Dv)_{x_0,\rho}|^2dx+2\int_{B_\rho(x_0)}|Dw-(Dw)_{x_0,\rho}|^2dx\\&\le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta}\int_{B_{R/2}(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,R/2}|^2dx+C\int_{B_{R/2}(x_0)}|Dw|^2dx.\end{aligned}$$

因之

$$\Phi(x_0,\rho)\le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\delta}\Phi(x_0,R/2)+\frac{C}{|B_\rho|}\int_{B_{R/2}(x_0)}|Dw|^2dx. \qquad (2.7)$$

另一方面, 由局部W-极小定义: $[1+W(\frac{R}{2})]\cdot F(v;B_{R/2})-F(u;B_{R/2})\ge 0$, **得**

$$\int_{B_{R/2}(x_0)}|Dw|^2dx\le\frac{2}{r}\{F_0(u;B_{R/2})-F_0(v;B_{R/2})+[1+w(\frac{R}{2})]\cdot F(v;B_{R/2})-F(u;B_{R/2})\}$$

$$\le C\int_{B_{R/2}(x_0)}h(|x-x_0|^2+|u-u_{x_0,R/2}|^2)\cdot(1+|Du|^2)dx$$

$$+C\int_{B_{R/2}(x_0)}h(|x-x_0|^2+|v-v_{x_0,R/2}|^2)\cdot(1+|Dv|^2)dx$$

$$+CR^{2\mu}\int_{B_{R/2}(x_0)}(1+|Du|^2)dx\overset{\triangle}{=}I_1+I_2+I_3.$$

由定理1.4, Hölder **不等式**, $h(t)\le Ct^\sigma$, $\frac{r}{r-2}>\frac{1}{\sigma}$,

$$I_1\le C\int_{B_R(x_0)}(1+|Du|^2)dx\cdot\left[\int_{B_{R/2}(x_0)}h^{\frac{r}{r-2}}(|x-x_0|^2+|u-u_{x_0,R/2}|^2)dx\right]^{1-\frac{2}{r}},$$

$$I_2\le C\int_{B_R(x_0)}(1+|Du|^2)dx\cdot\left[\int_{B_{R/2}(x_0)}h^{\frac{r}{r-2}}(|x-x_0|^2+|v-u_{x_0,R/2}|^2)dx\right]^{1-\frac{2}{r}}.$$

由$h(t)$**的单调增加性, 有界性, 得**

$$\int_{B_{R/2}(x_0)}|Dw|^2dx\le C[R^{n+2(1-\frac{2}{r})}+R^{n+2\mu}]\cdot\left[\int_{B_R(x_0)}(1+|Du|^2)dx\right]^{2-\frac{2}{r}}$$

$$\le CR^{n+2\delta_1}\left[1+\int_{B_R(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx+|(Du)_{x_0,R}|^2\right]^{2-\frac{2}{r}}$$

$$\le CR^{n+2\delta_1}H^{4(1-\frac{1}{r})}(x_0,R),\quad (\delta_1=\min(1-\frac{2}{r},\mu)).$$

回到(2.7)**式, 取**$k=4(1-\frac{1}{r})$, **得**

$$\Phi(x_0,\rho)\le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\delta}\frac{1}{R^n}\int_{B_{R/2}(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,R/2}|^2dx+CR^{2\delta_1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}H^\sigma(x_0,R)$$

$$\le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\delta}\Phi(x_0,R)+CR^{2\delta_1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}H^\sigma(x_0,R).$$

取适当的m, M, **得结论**(2.6)**式**

定理2.3 **设**$u\in H^1(\Omega,\mathbf{R}^N)$**是**(2.5)**的一个局部**$W$-**极小, 满足条件**A1-A3; $h(t)\le Ct^\sigma$, $W(R)\le CR^{2\mu}$, $\sigma,\mu\in(0,1)$, **则存在开集**$\Omega_0\subset\Omega$, **使得**u**在**Ω_0**上有局部**Hölder**连续的一阶导数**, $\Omega-\Omega_0\subset\Sigma_1\cup\Sigma_2$, $|\Omega-\Omega_0|=0$, **其中**

$$\Sigma_1=\{x_0\in\Omega\,|\,\sup_{\rho>0}|(Du)_{x_0,\rho}|=+\infty\},$$

$$\Sigma_2=\{x_0\in\Omega\,|\,\lim_{\rho\to 0^+}\rho^{-n}\int_{B_\rho(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2dx>0\}.$$

证明 **设**$x_0\in\Omega$, $B_R\subset\Omega$, **假定**u**在**$B_{R/2}(x_0)$**上满足**(2.2), **由引理**2.1, **引理**2.2, **得**: **当**$0<\tau<\frac{1}{2}$**时**, (2.6)**成立. 其中**, $\forall\epsilon>0$**满足**$0<\epsilon<\delta$, **取定**α_1**满足**$\delta-\frac{\epsilon}{2}<\alpha_1<\delta$, $m\tau^{2\delta-2\alpha_1}\le 1$.

假定对某个H_2**和**$R<R_0(H_2)\le 1$, **有**$H(x_0,R)\le\frac{1}{2}H_2$; $\Phi(x_0,R)\le\epsilon_1^2\le\frac{1}{2}\epsilon_0^2$**成立**, ϵ_1, R_0

待定, ϵ_0 由(2.2)确定, 那么(2.6)变为: $\Phi(x_0, \tau R) \le \tau^{2\alpha_1}\Phi(x_0, R) + M_1 H_2^k R^{2\delta_2}$, 其中, $M_1 = M\tau^{-n}$, $\delta_2 = \min(\delta - \epsilon, \delta_1)$.

对任意正整数 p, 有 $H(x_0, \tau^p R) \le H(x_0, R) + \tau^{-n}\sum_{j=0}^{p}\Phi^{\frac{1}{2}}(x_0, \tau^j R)$, 由归纳法可证:

$$\Phi(x_0, \tau^p R) \le \tau^{2\alpha_1 p}\Phi(x_0, R) + M_1\tau^{-n}(\tau^{k-1}R)^{2\delta_2}\cdot H_2^k\sum_{j=1}^{p}\tau^{2(\alpha_1-\delta_2)(p-j)}$$

其中 ϵ_1, R_0 满足 $\frac{2\tau^{-n}\epsilon_1^2}{1-\tau^{\delta_2}} \le \frac{1}{2}H_1$, $M_1\tau^{-2n}H_1^k\frac{R_0^{2\delta_2}}{\tau^{2\delta_2}-\tau^{2\alpha_1}} \le \epsilon_1^2$. 对所有正整数 p, $\Phi(x_0, \tau^{p+1}R) \le 2\epsilon_1^2\tau^{2\delta_2(p+1)}$ 成立

对于 $\rho \in (0, R]$, 存在某个正整数 p 使 $\tau^p R < \rho \le \tau^{p-1}R$,

$$\Phi(x_0, p) \le \frac{C}{(\tau^k R)^n}\int_{\rho(x_0)}\left|Du - (Du)_{x_0, \tau^{p-1}R}\right|^2 dx \le \frac{C}{\tau^n}\Phi(x_0, \tau^{p-1}R) \le \frac{C}{\tau^n}\tau^{2(p-1)\delta_2},$$

因为 $\tau^{p-1} < \frac{\rho}{R}$, 记 $A = \frac{C}{\tau^{n+2\delta_2}}$, 得到 $\Phi(x_0, \rho) \le A\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\delta_2}$, $(0 < \rho \le R)$. 根据文献[2]的结果, 这时 $Du \in C^{0, \delta_2}(B_R(x_0))$.

总之, 对于 $x_0 \in \Omega$, $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, 若 u 在 $B_R(x_0)$ 上满足(2.2); $\forall R_1 \in (0, R)$, $\exists R_2 \in (0, R_1)$, 使得 u 在 $B_{R_2}(x_0)$ 上满足(2.2), Du 在 x_0 点的某个开邻域内是 Hölder 连续的. 即存在 $\Omega_0 \subset \Omega$, u 在 Ω_0 上是一阶导数的 Hölder 连续, 并且 $\Omega \setminus \Omega_0 \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

由于 Du 的每个 Lebesgue 点均不属于 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, 而 Du 在 Ω 中几乎处处有 Lebesgue 点, 故测度 $|\Omega - \Omega_0| = 0$.

3 Du 在 Ω_0 中的 Hölder 连续指数估计

定理 3.1 在定理 2.3 的条件下, $Du \in C^{0, \alpha}(\Omega)$, $\alpha = \min(\sigma, \mu)$.

证明 设 $x_0 \in \Omega$, $B_R = B_R(x_0) \subset \Omega$; u 在 B_R 上满足条件(2.2), 由定理 2.3 的结果, 假定 Du 在 $\overline{B_R}$ 上 Hölder 连续, $Du \in L_\infty(B_R)$.

设 v 在 $J = \{v \in H^1(B_R, \mathbf{R}^N) \mid$ 在 ∂B_R 上, $u = v\}$ 中极小化泛函是

$$F_1(v; B_R) = \int_R A_{ij}^{\alpha\beta}D_\alpha v^i D_\beta v^j dx,$$

其中 $A_{ij}^{\alpha\beta} = f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x_0, u_{x_0, R}, (Du)_{x_0, R})$, 则 v 满足 Euler 方程

$$\int_R A_{ij}^{\alpha\beta}D_\beta v^j D_\alpha \varphi^i dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(B_R, \mathbf{R}^N).$$

由常系数线性椭圆型方程组正则理论知: $v \in C^{1, \theta}(\overline{B_R})$, $0 < \theta \le \delta_2$, 并且 $\|Dv\|_{L_\infty(B_R)} \le C\|Du\|_{L_\infty(B_R)}$ 以及对 $\rho \in (0, R]$, 有 $\int_\rho\left|Dv - (Dv)_{x_0, \rho}\right|^2 dx \le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_R\left|Dv - (Dv)_{x_0, R}\right|^2 dx$.

令 $w = u - v$, 由定理 1.3 和 u 的 W-极小性, 得

$$\int_\rho\left|Du - (Du)_{x_0, \rho}\right|^2 dx \le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_R\left|Du - (Du)_{x_0, R}\right|^2 dx + C\int_R|Dw|^2 dx, \quad (3.1)$$

其中

$$\int_{B_R} |Dw|^2 dx \le C\{F_1(u, B_R) - F_1(v, B_R) + 2F(v, B_R) - 2F(u, B_R)\} + CW(R)F(v, B_R)$$

取 $\xi = (Du)_{x_0,R}$, **得**

$$f(x,u,Du) = f(x,u,\xi) + f_{p_\alpha^i}(x,u,\xi)(D_\alpha u^i - \xi_\alpha^i)$$
$$+ \frac{1}{2} f_{p_\alpha^i p_\beta^j}[x,u,\xi + t_1(Du - \xi)] \cdot (D_\alpha u^i - \xi_\alpha^i) \cdot (D_\beta u^j - \xi_\beta^j),$$
$$f(x,v,Dv) = f(x,v,\xi) + f_{p_\alpha^i}(x,u,\xi)(D_\alpha v^i - \xi_\alpha^i)$$
$$+ \frac{1}{2} f_{p_\alpha^i p_\beta^j}[x,u,\xi + t_1(Dv - \xi)] \cdot (D_\alpha v^i - \xi_\alpha^i) \cdot (D_\beta v^j - \xi_\beta^j).$$

中值 $t_1, t_2 \in (0,1)$, **从而**

$$\int_{B_R} |Dw|^2 dx \le C(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) + CR^{n+2\mu}.$$

对于

$$I_1 = \int_{B_R} \{[A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha u^i D_\beta u^j - A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha u^i (D_\beta u^j - \xi_\beta^j)]$$
$$+ [A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha u^i (D_\beta u^j - \xi_\beta^j) - A_{ij}^{\alpha\beta}(D_\alpha u^i - \xi_\alpha^i)(D_\beta u^j - \xi_\beta^j)]$$
$$+ [\int_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x_0, u_{x_0,R}, \xi) - \int_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x,u,\xi + t_1(Du - \xi)]$$
$$\cdot (D_\alpha u^i - \xi_\alpha^i)(D_\beta u^j - \xi_\beta^j)\} dx = \text{Ⅰ} + \text{Ⅱ} + \text{Ⅲ}.$$

类同文献[2], p195, **由条件** A_2, **存在一个非负有界连续函数** $Z(t,s)$ **满足**:

1. $Z(t,s)$ **对固定其中一个变量, 另一个变量是单调增加的**;
2. **对固定** t, $Z(t,s)$ **关于** s **下凸**;
3. $Z(t,0) = 0$;
4. **对每个** $(x,u,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^{nN}$, **若** $|u| + |p| \le M$,

则

$$|f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x,u,p) - f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(y,v,q)| \le Z(M, |x-y|^2 + |u-v|^2 + (p-q)^2,$$

因之,

$$\text{Ⅰ} + \text{Ⅱ} = \int_{B_R} A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha u^i \xi_\beta^j dx + \int_{B_R} A_{ij}^{\alpha\beta} \xi_\alpha^i (D_\beta u^j - \xi_\beta^j) dx,$$
$$\text{Ⅲ} \le Z(M, CR^{2\delta_2}) \int_{B_R} |Du - (Du)_{x_0,R}|^2 dx.$$

对于

$$I_2 = -\int_{B_R} [A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta v^j - A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha v^i (D_\beta v^j - \xi_\beta^j)] dx$$
$$- \int_{B_R} [A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha v^i (D_\beta v^j - \xi_\beta^j) - A_{ij}^{\alpha\beta}(D_\alpha v^i - \xi_\alpha^i)(D_\beta v^j - \xi_\beta^j)] dx$$
$$- \int_{B_R} [A_{ij}^{\alpha\beta} - f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x,v,\xi + t_2(Dv - \xi)](D_\alpha v^i - \xi_\alpha^i)(D_\beta v^j - \xi_\beta^j) dx$$
$$\le -\int_{B_R} A_{ij}^{\alpha\beta} D_\alpha v^i \xi_\beta^j dx - \int_{B_R} A_{ij}^{\alpha\beta} \xi_\alpha^i (D_\beta v^j - \xi_\beta^j) dx + k$$

其中,

$$k=\int_R \left|f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x_0,u_{x_0,R},\xi)-f_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x,v,\xi+t_2(Dv-\xi))\right|\cdot\left|Dv-(Dv)_{x_0,R}\right|^2dx,$$

因 $u\in C^{1,\delta_1}(\overline{B_R})$, $v\in C^{1,\delta_2}(\overline{B_R})$, 取 $y_0=\partial B_R$, 可知

$$|u-v|^2=|u(x)-u(y_0)+v(y_0)-v(x)|\le 2|u(x)-u(y_0)|^2+2|v(x)-v(y_0)|^2\le 16R^{2\delta_2},$$

$$|Du-(Du)_{x_0,R}|^2\le R^{2\delta_2},\ |u-u_{x_0,R}|^2\le R^{2\delta_2},\ |Du-Dv|^2\le 16R^{2\delta_2}.$$

于是

$$k\le CZ(M,CR^{2\delta_2})\int_R|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx+C_0Z(M,C^{2\delta_2})\int_R|Dw|^2dx.$$

综合上述, 有

$$I_1+I_2\le CZ(M,CR^{2\delta_2})\int_R|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx+C_0Z(M,CR^{2\delta_2})\int_R|Dw|^2dx.$$

另一方面, 由条件 A_2, A_3 和文献[5]的方法知:

$$|f_p(x,u,p)-f_p(y,v,p)|\le C[|x-y|^2+|u-v|^2]^{\sigma/2}\cdot(1+|p|).$$

因之,

$$I_3=2\int_R[f_{p_\alpha^i}(x,v,\xi)(D_\alpha v^i-\xi_\alpha^i)-f_{p_\alpha^i}(x,v,\xi)(D_\alpha u^i-\xi_\alpha^i)]dx$$

$$+2\int_R[f_{p_\alpha^i}(x,v,\xi)-f_{p_\alpha^i}(x,u,\xi)]\cdot(D_\alpha u^i-\xi_\alpha^i)dx$$

$$\le C\int_R(|x-x_0|^2+|v-v_{x_0,R}|^2)^{\frac{\sigma}{2}}|Dw|dx+R^2\int_R(|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx$$

$$+CR^{n-n\sigma-\epsilon}\left[\int_R|u-v|^2dx\right]^{\sigma}\text{(由 Poincare 不等式和 }|Du-Dv|\le CR^{\delta_2}\text{知)}$$

$$\le C\int_R(|x-x_0|^2+|v-v_{x_0,R}|^2)^{\frac{\sigma}{2}}|Dw|dx+R^{2\delta_2\sigma}\int_R(|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx$$

$$+CR^{n+2\sigma}.$$

$$I_4=C\int_R h(|u-v|^2)\cdot(1+|(Du)_{x_0,R}|^2)dx\le C\int_R|u-v|^{2\sigma}dx\quad(|u-v|\le CR)$$

$$\le CR^{n+2\sigma}$$

总之, 取 R 充分小, 使得 $CZ(M,CR^{2\sigma_2})\le\frac{1}{4}$, 记 $\alpha=\min(\sigma,\mu)$, 得到:

$$\int_R|Dw|^2dx\le CZ(M,CR^{2\delta_2})\int_R|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx+CH(M,CR^{2\delta_2})\int_R|Dw|^2dx$$

$$+C\int_R(|x-x_0|^2+|v-v_{x_0,R}|^2)^{\frac{\sigma}{2}}|Dw|dx+CR^{2\delta_2\sigma}\int_R(|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx$$

$$+CR^{n+2\sigma}+CR^{n+2\mu}\le C[Z(M,CR^{2\sigma_2})+R^{2\delta_2\sigma}]\int_R|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx$$

$$+\frac{1}{4}\int_R|Dw|^2dx+C\int_R(|x-x_0|^2+|v-v_{x_0,R}|^2)^{\sigma}dx+CR^{n+2\alpha}.$$

由于 $\int_R|v-v_{x_0,R}|^{2\sigma}dx\le CR^{2\sigma}\int_R|Dv|^{2\sigma}dx\le CR^{n+2\alpha}$, 因此

$$\int_R|Dw|^2dx\le M(x_0,R)\int_R|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx+CR^{n+2\alpha},$$

其中$M(x_0,R)\overset{\triangle}{=}CR^{2\delta_2\sigma}+CH(M,CR^{2\delta_2})\to 0$(当$R\to 0$时).

回到(3.1)式,得

$$\int_{\rho}|Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2dx\le C[(\frac{\rho}{R})^{n+2}+M(x_0,R)]\int_{R}|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx+CR^{n+2\alpha}.$$

根据文献[4]的结论,$\epsilon_0=\epsilon_0(c,\alpha)$,当取$R$使得$M(x_0,R)<\epsilon_0$时,

$$\int_{\rho(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,R}|^2dx\le C\rho^{n+2\alpha}.$$

类同于定理2.3的证法,可得$Du\in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$.

参 考 文 献

[1] M. Giaquinta and E. Giusti, *Quasi-minima*, Ann. Inst. Hernri Poincare, 1: 2(1984).

[2] J. Soucek, *Integrals Multiple in the Calculus of Variations and Nonlinear Systems*, Princeton University Press, 1983.

[3] G. Anzellotti, *On the $C^{1,\alpha}$-regularity of W-minima of quadratic functionals*, Boll U. M. I Ser Ⅵ, Vol 11, C. N. I 1983.

[4] M. Giaquinta and E. Giusti, *Differentiability of minima of non-differentiable functionals*, Invent Math., 72(1983).

[5] Nirenberg, *L. Remarks on the strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl Math., 8(1955).

[6] M. Giaquinta and E. Giusti, *Sharp estimates for the derivatives of local minima of variational integrals*, Boll U. M. I (6) 3-A, 1984.

On the $C^{1,\alpha}$-Regularity of the W-Minima of the Regular Function

Fei Ning

(Dept. of Appl., Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract

This paper discusses the $C^{1,\alpha}$-regularity of the local W-minima of the regular function: $F(u,\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)dx$, and obtains the exponent estimate of the α on the Hölder continuity of the local W-minima u.

Keywords W-minima, regularity, regular function.