第 18 卷第 2 期　数学研究与评论　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　May 1998

一类非线性积分方程正解的存在唯一性*

赵增勤　李宪奎
(曲阜师范大学数学系, 山东 273165)

摘　要　本文研究积分方程 $u(x)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,u(y))dy,\ \lambda>0$ 及其它的非线性摄动 $u(x)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,u(y))dy+G(u(x))$, 在 $k(x,y)$ 非负可测, $f(x,u)$, $G(u)$ 满足一定条件下, 得到所述方程解的存在唯一性及其迭代逼近.

关键词　积分方程, 摄动, 正解

分类号　AMS(1991) 45G/CCL O175

1　引　言

关于 Hammerstein 型积分方程已有很多结果[1-4], Erbe, Guo 与 Liu 在[4]中研究了方程

$$u(x)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,u(y))dy,\quad \lambda>0 \tag{1.1}$$

以及它的非线性摄动

$$u(x)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,u(y))dy+G(u(x)), \tag{1.2}$$

其中 $f(x,u)$ 是多项式的倒数. 作为文[5]的继续, 本文对(1.1), (1.2)做进一步探讨. 这里 $f(x,u)$ 不必是多项式的倒数且不必连续, 积分域 Ω 只要求有正测度, 去掉了关于 G 的压缩性条件. 得到所述方程有唯一解, 此解可用迭代列逼近. 作为推论得到[4]中结果的改进.

设 $R_+=[0,+\infty)$, $\Omega\subset R^N$; $M^+(\Omega)$, $L^+(\Omega)$ 分别表示 Ω 上非负可测函数全体与非负可积函数全体. Ω 上几乎处处相等的函数视为同一函数, 用 $\|\cdot\|_N$, $\|\cdot\|_C$ 分别表示 R^N 中的范数与 $C(\Omega)$ 中的范数.

设 $f(x,u):\Omega\times R_+\to R_+$. 如果由 $F(u)=f(x,u(x))$ 定义的叠加算子 F 映 $M^+(\Omega)$ 入 $M^+(\Omega)$, 则称函数 $f(x,u)$ 是叠加可测的. 显然, 若 f 满足 Caratheodory 条件(即(i) 对几乎所有的 $x\in\Omega$, $f(x,u)$ 是 u 的连续函数; (ii) 对每个 $u\in R_+$, $f(x,u)$ 是 x(在 Ω 上)的可测函数), 则 f 是叠加可测的[6]. 关于叠加可测函数性质的讨论见[7].

为了叙述方便, 作如下假定:

(H_1)　Ω 是 Lebesgue 可测集, $0<m\Omega\leq+\infty$;

(H_1')　$\Omega\subset R^N$ 是有界闭域;

* 1995 年 3 月 4 日收到. 1997 年 10 月 20 日收到修改稿.

(H$_2$) $f(x,u)$是叠加可测的, 对每个$x\in\Omega$, $f(x,u)$关于u是减的. 对任何$0<h<\infty$, $0<t<1$, 存在$\eta=\eta(t,h)>0$使对任何$(x,y)\in\Omega\times[0,h]$成立$f(x,ty)\le[(1+\eta)t]^{-1}f(x,y)$;

(H$_3$) 存在$\alpha_0>0$使$0<\inf\limits_{x\in\Omega}f(x,\alpha_0)$, $\sup\limits_{x\in\Omega}f(x,0)<+\infty$;

(H$_3'$) 存在$\alpha_0>0$, $\epsilon_0>0$, 使对任何$x\in\Omega$成立$f(x,\alpha_0)\ge\epsilon_0 f(x,0)$, 且$f(x,0)$有界.

(H$_4$) $k(x,y)$是$\Omega\times\Omega$上的非负可测函数, $\int_\Omega k(x,y)dy$是有界的且$\inf\limits_{x\in\Omega}\int_\Omega k(x,y)dy>0$;

(H$_4'$) $\int_\Omega k(x_0,y)dy>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\int_\Omega|k(x,y)-k(x_0,y)|dy=0$, $\forall x_0\in\Omega$;

(H$_4''$) $0\not\equiv\int_\Omega k(x,y)dy\ge0$, $\lim\limits_{x\to x_0}|k(x,y)-k(x_0,y)|dy=0$, $\forall x_0\in\Omega$;

(H$_5$) $G:R_+\to R_+$是非增的, 且对任何$u>0$, $0<t<1$成立$G(tu)\le t^{-1}Gu$.

2 正解的存在唯一性

定理2.1 设(H_1)-(H_5)满足, 则方程(1.2)在$L^+(\Omega)$中有唯一解$u^\lambda(x)$, 它满足

$$0\le u^\lambda(x)\le\sup_{x\in\Omega}\{\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,0)dy+G(0)\},\ x\in\Omega \tag{2.1}$$

以任何$\varphi_0\in L^+(\Omega)$为初始函数作迭代序列

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,\varphi_n(y))dy+G(\varphi_n(x)),\ n=1,2,\cdots, \tag{2.2}$$

则$\{\varphi_n(x)\}$在Ω上收敛于$u^\lambda(x)$.

证明 令$M_\lambda=\sup\limits_{x\in\Omega}\{\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,0)dy+G(0)\}$,

$$B(\varphi)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,\varphi(y))dy,\ G(\varphi)=G(\varphi(x)),\ \forall\varphi\in M^+(\Omega),$$

$$A(\varphi)=B(\varphi)+G(\varphi),\ \forall\varphi\in M^+(\Omega),$$

$$u_0(x)\equiv0,\ u_n(x)=A(u_{n-1}(x)),\ n=1,2,\cdots, \tag{2.3}$$

则显然成立

$$A\varphi_1\le A\varphi_2,\ \forall\varphi_1\ge\varphi_2,\ \varphi_1,\varphi_2\in M^+(\Omega), \tag{2.4}$$

$$A(t\varphi)\le t^{-1}A\varphi,\ \forall\varphi\in M^+(\Omega),\ 0<t<1. \tag{2.5}$$

由(H_3), (H_4)知对任何$\lambda>0$, M_λ有限且$u_1(x)\le M_\lambda$, $x\in\Omega$. 由(2.3), (2.4)知存在$u(x)$, $v(x)\in L^+(\Omega)$使

$$\lim_{n\to\infty}u_{2n}=u,\ \lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=v, \tag{2.6}$$

$$u_0\le u_2\le\cdots\le u_{2n}\le u\le v\le u_{2n+1}\le\cdots\le u_3\le u_1\le M_\lambda, \tag{2.7}$$

$$M_\lambda\ge v\ge Au\ge Av\ge u\ge u_0. \tag{2.8}$$

记$l=\inf\limits_{x\in\Omega}f(x,\alpha_0)$, $L=\sup\limits_{x\in\Omega}f(x,0)$, $\epsilon_1=\min\{1,lL^{-1},\frac{\alpha_0}{M_\lambda}lL^{-1},G(M_\lambda)/G(0)\}$, 则由$(H_2)$, (H_3)知

$$f(x,M_\lambda)\ge\epsilon_1 f(x,0),\ G(M_\lambda)\ge\epsilon_1 G(0), \tag{2.9}$$

$$B(M_\lambda)\ge\epsilon_1\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,0)dy\ge\lambda\epsilon_2>0, \tag{2.10}$$

其中$\epsilon_2=\epsilon_1 l\inf\limits_{x\in\Omega}\int_\Omega k(x,y)dy$. 结合(2.3), (2.4), (2.7)与(2.9)得

$$u_2 \geq A(M_\lambda) \geq \epsilon_1 A(0) \geq \epsilon_1 u, u_3 \leq \epsilon_1^{-1} u_2 \leq \epsilon_1^{-1} v. \tag{2.11}$$

令

$$r_n = \sup\{\alpha > 0 \mid \alpha u \leq u_{2n}, \alpha u_{2n+1} \leq v\}, n = 1, 2, \cdots. \tag{2.12}$$

由(2.7), (2.11)知$\{r_n\}$是首项不小于 ϵ_1 每项不超过 1 的单调增加数列, 下面证明$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$.

若不然, 存在 $r < 1$, 使 $r_n \leq r(n = 1, 2, \cdots)$. 由($H_2$)知存在 $\eta_1 = \eta(r, M) > 0$, $\eta_2 = \eta(r, r^{-1}M) > 0$ 使

$$B(ru) \leq [r(1+\eta_1)]^{-1} B u, B(r^{-1}v) \geq r(1+\eta_2) B v. \tag{2.13}$$

取实数 β_1 使

$$\frac{(1+\eta_1)^{-1}\lambda\epsilon_2 + G(0)}{\lambda\epsilon_2 + G(0)} \leq \beta_1 < 1, \tag{2.14}$$

这结合(2.7), (2.10)式得$[\beta_1 - (1+\eta_1)^{-1}] B u \geq (1-\beta_1) G u$, 从而得知

$$(1+\eta_1)^{-1} B u + G u \leq \beta_1 A u. \tag{2.15}$$

由(2.3)-(2.5), (2.8), (2.12)-(2.15)得到

$$u_{2n+3} \leq \frac{r}{r_{n+1}}[B(ru) + G(ru)] \leq \frac{\beta_1}{r_{n+1}} A u \leq \frac{\beta_1}{r_n} v. \tag{2.16}$$

取实数 β_2 使

$$(1+\eta_2)^{-1} < \beta_2 \leq \frac{\lambda\epsilon_2 + (1+\eta_2)^{-1} G(0)}{\lambda\epsilon_2 + G(0)}. \tag{2.17}$$

这结合(2.8), (2.10), (2.13)与B 的减性得

$$\begin{aligned} &(1-\beta_2) B v \geq [\beta_2 - (1+\eta_2)^{-1}] G(0) \geq [\beta_2 - (1+\eta_2)^{-1}] G v, \\ &A(r^{-1}v) \geq r(1+\eta_2)[B v + (1+\eta_2)^{-1} G v] \geq r\beta_2(1+\eta_2) A v. \end{aligned} \tag{2.18}$$

用(2.3)-(2.5), (2.8)与(2.12), (2.18)得

$$u_{2n+2} \geq \frac{r_n}{r} A(r^{-1}v) \geq r_n \beta_2(1+\eta_2) u. \tag{2.19}$$

记 $\overline{d} = \min\{\beta_2(1+\eta_2), \beta_1^{-1}\}$, 则由(2.12), (2.16)与(2.19)式知 $r_{n+1} \geq r_1 \overline{d}^n$, 又由(2.14)与(2.17)知 $\overline{d} > 1$. 这矛盾于 $r_n \leq 1$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$.

由(2.3)-(2.5)与(2.7), (2.12)式知 $u \geq A u_{2n+1} \geq A(r_n^{-1} v) \geq r_n A v$, $v \leq A u_{2n} \leq A(r_n u) \leq r_n^{-1} A u$, 注意到$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$, 结合(2.8)式得

$$u = A v, v = A u. \tag{2.20}$$

取 $t_0 = \sup\{t > 0 \mid u \geq t v\}$. 由(2.7), (2.10)知 $t_0 \geq \epsilon_1$. 假若 $t_0 < 1$, 由(H_2)知存在 $\eta_3 = \eta(t_0, t_0^{-1} M) > 0$ 使

$$B(t_0 v) \leq [t_0(1+\eta_3)]^{-1} B v. \tag{2.21}$$

取实数 β_3 使$\dfrac{(1+\eta_3)^{-1}\lambda\epsilon_2 + G(0)}{\lambda\epsilon_2 + G(0)} \leq \beta_3 < 1$, 结合(2.7), (2.10)式得$[\beta_3 - (1+\eta_3)^{-1}] B v \geq (1-\beta_3) G v$. 这结合(2.20), (2.21)式得 $v \leq A(t_0 v) \leq [t_0(1+\eta_3)]^{-1} B v + t_0^{-1} G v \leq \dfrac{\beta_3}{t_0} u$, 这与 t_0 是上确界矛盾, 于是 $t_0 \geq 1$. 这与(2.8)式知 $u = v = A u = A v$. 记 $u = v = u^\lambda$, 显然 u^λ 是(1.2)的解且满足

$$u_0 \leq u^\lambda \leq M_\lambda \tag{2.22}$$

以任何 $\varphi_0 \in L^+(\Omega)$ 为初始函数作迭代序列

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n, n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.23}$$

则 $u_{2n-2} \leq \varphi_{2n} \leq u_{2n-1}$, $u_{2n} \leq \varphi_{2n+1} \leq u_{2n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 结合(2.6)式得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = u^\lambda. \tag{2.24}$$

显然 u^λ 是(1.2)的唯一解. 再由(2.22)-(2.24)式知本定理的结论成立.

注 1　本定理中, Ω 仅是正测度集, 不假定 $k(x, y)$, $f(x, y)$, $G(u)$ 任何连续性, 得到其正解存在唯一, 并可用迭代列逼近.

定理 2.2　设(H_1'), (H_2), (H_3), (H_4'), (H_5)满足且 G 是连续函数. 则(1.2)在 $L^+(\Omega)$ 中有唯一解 $u^\lambda(x)$, $u^\lambda(x)$ 连续且满足(2.1)式. 以任何连续函数 φ_0 为初始元作迭代列(2.2)式, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - u^\lambda \|_c = 0. \tag{2.25}$$

证明　当(H_4')满足时(H_4)必满足, 由此得知定理 2.1 的结论与证明都成立.

对 $x_0 \in \Omega$, 取定的非负整数 m, 有

$$|u_{m+1}(x) - u_{m+1}(x_0)| \leq \int_\Omega |k(x, y) - k(x_0, y)| f(y, u_m(y)) dy + |G(u_m(x)) - G(u_m(x_0))|.$$

用此式和(H_4'), 由 G 的连续性与 $u_m(x)$ 的连续性可推得 $u_{m+1}(x)$ 的连续性. 由此可归纳地得到 $\{u_n(x)\}$是 Ω 上的连续函数列.

取 $\frac{5}{6} > \epsilon > 0$, 由定理 2.1 的证明知对(2.12)中的$\{r_n\}$存在 N, 当 $n \geq N$ 时有 $1 - \frac{2\epsilon}{5} < r_n \leq 1$. 于是存在$\{\alpha_n\}$使

$$\alpha_n u \leq u_{2n}, \alpha_n u_{2n+1} \leq u, 1 - \frac{2\epsilon}{5} < \alpha_n \leq r_n \leq 1, n \geq N. \tag{2.26}$$

从而对任何自然数 p $(n \geq N)$, 用(2.7)与(2.26)式有 $0 \leq u_{2(n+p)} - u_{2n} \leq (\frac{1}{\alpha_{n+p}} - \alpha_n) u \leq \epsilon u_1$. 于是得知$\{u_{2n}(x)\}$在 Ω 上一致收敛于 $u(x)$. 用$\{u_{2n}(x)\}$每项的连续性便知 $u^\lambda(x)$ 的连续性. 从而(2.25)式成立.

注 2　定理 2.2 的意义在于不假定 $f(x, u)$ 的连续性, 但得到的唯一解却是连续的.

3　固有函数与有关推论

定理 3.1　设(H_1), (H_2), (H_3'), (H_4'')满足, 则有

(Ⅰ)　对 $\lambda > 0$, 方程(1.1)在 $L^+(\Omega)$ 中有唯一解 $\varphi^\lambda(x)$, 它满足

$$0 \leq \varphi^\lambda(x) \leq \lambda(\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega k(x, y) f(y, 0) dy), x \in \Omega; \tag{3.1}$$

(Ⅱ)　以任何 $\varphi_0 \in L^+(\Omega)$ 为初始作迭代序列 $\varphi_0^\lambda = \varphi_0$, $\varphi_{n+1}^\lambda = \lambda \int_\Omega k(x, y) f(y, \varphi_n^\lambda(y)) dy$, $n = 1, 2, \cdots$ 必成立 $\varphi_n^\lambda \to \varphi^\lambda (n \to \infty)$;

(Ⅲ)　对任何 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, 存在实数 $\omega = \omega(\lambda_1, \lambda_2) > 1$ 使 $\varphi^{\lambda_2}(x) \geq \omega \varphi^{\lambda_1}(x)$, $\forall x \in \Omega$;

(Ⅳ)　$\lim_{\lambda\to\lambda_0} [\sup_{x\in\Omega} |\varphi^\lambda(x) - \varphi^{\lambda_0}(x)|] = 0$, $\forall \lambda_0 > 0$;

(Ⅴ)　$\lim_{\lambda\to 0^+} [\sup_{x\in\Omega} |\varphi^\lambda(x)|] = 0$;

(Ⅵ) **如果**(H_2)**中的** η **满足** $\lim\limits_{t\to 0}\eta(t,h)=+\infty$, **则** $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}[\sup\limits_{x\in\Omega}\varphi^{\lambda}(x)]=+\infty$.

证明　令

$$A\varphi=\int_{\Omega}k(x,y)f(y,\varphi(y))dy,\quad \forall\varphi\in M^{+}(\Omega), \tag{3.2}$$

$$u_0(x)\equiv 0,\ u_n(x)=Au_{n-1}(x),\ n=1,2,\cdots, \tag{3.3}$$

则显然成立

$$A\varphi_1\ge A\varphi_2,\ \forall\varphi_1\le\varphi_2,\ \varphi_1,\varphi_2\in M^{+}(\Omega). \tag{3.4}$$

对任意 $\varphi(x)\in L^{+}(\Omega)$, $\varphi(x)\le M$, $0<t<1$, **由条件**(H_2)**知存在** $\eta=\eta(t,M)>0$ **使**

$$A(t\varphi)\le[(1+\eta)t]^{-1}A\varphi,\ A(t^{-1}\varphi)\ge t[1+\eta(t,t^{-1}M)]A\varphi \tag{3.5}$$

类似于定理 2.1 **的证明则得到** $\lambda=1$ **时结论**(Ⅰ),(Ⅱ). **对给定的** $\lambda>0$, **令** $f^{\lambda}(x,u)=\lambda f(x,u)$. **对** $f^{\lambda}(x,u)$ **用已得的结果得到结论**(Ⅰ),(Ⅱ).

对任意 $\lambda_2>\lambda_1>0$, **令** $u_0^{\lambda_i}(x)\equiv 0$, $u_{n+1}^{\lambda_i}=\lambda_i A u_n^{\lambda_i}$, $i=1,2$, $n=0,1,2,\cdots$, **则利用**(3.4),(3.5)**式可以归纳地得到** $u_{2n-1}^{\lambda_2}\le\frac{\lambda_2}{\lambda_1}u_{2n-1}^{\lambda_1}$, $u_{2n}^{\lambda_2}\ge u_{2n}^{\lambda_1}$, $n=1,2,\cdots$. **根据**(Ⅱ)**知** $u_{2n}^{\lambda_i}\to\varphi^{\lambda_i}$, $u_{2n-1}^{\lambda_i}\to\varphi^{\lambda_i}$ $(i=1,2)$. **于是有**

$$\varphi^{\lambda_1}\le\varphi^{\lambda_2}\le\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varphi^{\lambda_1}. \tag{3.6}$$

利用(3.4)**与**(3.5)**式得** $\varphi^{\lambda_2}\ge\lambda_2 A(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varphi^{\lambda_1})\ge\lambda_1[1+\eta(\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{\lambda_2}{\lambda_1}M)]A\varphi^{\lambda_1}=[1+\eta(\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{\lambda_2}{\lambda_1}M)]\varphi^{\lambda_1}$.
于是结论(Ⅲ)**成立. 由**(3.6)**知**

$$0\le\varphi^{\lambda}-\varphi^{\lambda_0}\le\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\varphi^{\lambda_0},\ \lambda>\lambda_0>0\ \text{时}, \tag{3.7}$$

$$0\le\varphi^{\lambda_0}-\varphi^{\lambda}\le\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}\varphi^{\lambda},\ \lambda_0>\lambda>0\ \text{时}. \tag{3.8}$$

由(3.7),(3.8)**式结合**(Ⅰ)**得到**(Ⅳ). **由**(3.1)**知**(Ⅴ)**成立. 由**(3.5)**知当** $\lambda>1$ **时** $\lambda^{-1}\varphi^{\lambda}\le\varphi^{1}$, **用**(3.4)**与**(3.5)**式得** $\varphi^{1}=A\varphi^{1}\le A(\lambda^{-1}\varphi^{\lambda})\le[1+\eta(\lambda^{-1},M)]\varphi^{\lambda}$, **取** $\lambda\to+\infty$ **得**(Ⅵ).

研究下述积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\Omega}k(x,y)[a_0(y)+\sum_{i=1}^{p}a_i(y)(\varphi(y))^{\alpha_i}]^{-1}dy,\ \lambda>0, \tag{3.9}$$

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\Omega}k(x,y)[a_0(y)+\sum_{i=1}^{p}a_i(y)(\varphi(y))^{\alpha_i}]^{-1}dy+G(\varphi(x)), \tag{3.10}$$

其中 $k(x,y)$, $a_i(x)$ **非负可测**, $0<\alpha_i\le 1$ $(i=0,1,\cdots,p)$. **利用已得到的结果, 有以下各推论.**

推论 1　**设**(H_1'),(H_4'),(H_5)**满足, 且** $\inf\limits_{x\in\Omega}a_0(x)>0$, $\sum\limits_{i=0}^{m}a_i(x)$ **有界**, $G(u)$ **连续. 则方程**(3.10)**在** $L^{+}(\Omega)$ **中有唯一解** $u^{\lambda}(x)$, $u^{\lambda}(x)$ **连续且满足**(2.1)**式. 以任何** $\varphi_0\in L^{+}(\Omega)$ **为初始作迭代序列**(2.2), **则**(2.25)**式成立.**

证明　记 $f(x,u)=[a_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{p}a_i(x)u^{\alpha_i}]^{-1}$, $\eta(t,h)=\dfrac{t^{-1}-1}{1+(1+h)R}$, **则**

$$\frac{f(x,u)}{f(x,tu)}\ge t\Big(1+\frac{(t^{-1}-1)a_0(x)}{a_0(x)+(h+1)\sum\limits_{i=1}^{p}a_i(x)}\Big)\ge t(1+\eta(t,h)),$$

用定理2.1得到此推论.

注3　此推论把[4]中关于 G 的压缩性条件(3.2)(那是较强的条件)减弱为连续;去掉了 $a_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 的连续性要求;得到的唯一解可以迭代求出.

推论2　设 (H_1), (H_4'') 满足, $\inf_{x\in\Omega} a_0(x)>0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\le R a_0(x)$, 则

(Ⅰ)　对任意 $\lambda>0$, 方程(3.9)有唯一非负可测解 $\varphi(x)$, 这个解是连续的且满足 $0<\varphi(x)\le \lambda \inf_{x\in\Omega} a_0(x)\int_\Omega k(x,y)dy$.

(Ⅱ)　定理3.1中结论(Ⅱ)-(Ⅴ)成立, 且 $\lim_{\lambda\to+\infty}[\sup_{x\in\Omega}(\varphi(x))]=0$, 其中 $f(x,u)=[a_0(x)+\sum_{i=1}^{p}a_i(x)u^{\alpha_i}]^{-1}$.

注4　此推论由定理3.1得到.它与[4]中定理2.1相比, $a_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,p)$ 不需要连续,也可以无界.

参　考　文　献

[1]　郭大钧, 多项式型Hammerstein积分方程的正解及其应用, 数学年刊, 4A:5(1983), 645-656.

[2]　孙经先, 非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用, 数学学报, 31:1(1988), 101-107.

[3]　孙经先, Hammerstein型积分方程正解的存在性及其应用, 数学年刊, 9A:1(1988), 90-96.

[4]　Lynn Eybe, Guo Dajun and Liu Xinzhi, *Positive solutions of a class of nonlinear integral equations and applications*, J. Int. Equ. Appl., 4:2(1992), 179-195.

[5]　赵增勤, 关于多项式型Hammerstein积分方程的唯一正解, 系统科学与数学, 14:2(1994), 97-101.

[6]　郭大钧, 非线性泛函分析, 山东科学技术出版社, 1985.

[7]　Jurgen Appell, P. Petr, Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge Tracts in Mathematics 95, Cambridge University Press, 1990.

On the Uniqueness and Existence of Positive Solution to a Class of Nonlinear Integral Equations

Zhao Zengqin　　Li Xiankui

(Dept. of Math., Qufu Normal University, Shandong 273165)

Abstract

We study the integral equation $u(x)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,u(y))dy$, $\lambda>0$ and its nonlinear perturbation $u(x)=\lambda\int_\Omega k(x,y)f(y,u(y))dy+G(u(x))$ where $k(x,y)$ is nonnegative measurable. Under some reasonable conditions on $f(x,u)$ and $G(u)$, we obtain the uniqueness and existence of positive solution for the equations, and also the iteration approximations of the solutions.

Keywords　integral equation, perturbation, positive sotution.